INFLUENCIA DE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO.

Autores: Otoniel Riverón Portela. (*)
Juan Antonio Martín Alfonso. (*)
Idalia González Companionis.(*)
Ángel Gómez Argüelles.(**)

Dirección: (*) Universidad de Ciego de Ávila, Km. 9 carretera Ciego Morón. Cuba.
Teléfonos: 033266434, 2-5337 Fax 033266365
E-mail: oto@centic.unica.cu
(**) Instituto Superior Pedagógico "Manuel Ascunce Doménech", Km. 1/2
carretera a Ceballos. Teléfono: 023554

RESUMEN:

En este trabajo se hace un análisis sobre el pensamiento, el pensamiento lógico y la relación de este último con los procedimientos lógicos. Se analizan las relaciones entre la Matemática, la lógica y los procedimientos lógicos del pensamiento. Se valoran las posibilidades de esta asignatura para desarrollar tales procedimientos.

INTRODUCCIÓN:

El concepto procedimiento se emplea con frecuencia en la literatura Psicológica y pedagógica. Por procedimiento lógico del pensamiento entendemos aquellos procedimientos más generales, que se utilizan en cualquier contenido concreto del pensamiento, se asocian a las operaciones lógicas del pensamiento y se rigen por reglas y leyes de la lógica. De aquí se desprende la amplitud de su aplicación.

En la práctica, los procedimiento lógicos siempre aparecen ligados a un contenido concreto, que depende del campo de aplicación y que le añade un componente específico, en una estrecha interrelación con el componente general.

Aunque existe un estrecho nexo entre estos dos componentes, ellos son relativamente independiente, lo cual se expresa en la posibilidad del individuo que domina el procedimiento, de aplicar la parte lógica a cualquier contenido específico.

Los procedimientos lógicos no dependen del contenido concreto mientras que los procedimientos específicos pueden ser utilizados solo en una esfera determinada. Por otro lado, en la actividad real del hombre, los procedimientos lógicos siempre se ejecutan con algún contenido específico.

Los procedimientos lógicos asociándolos a las formas lógicas del pensamiento se pueden clasificar: (Campistrous 1993)

1. Procedimientos lógicos asociados a conceptos.
    - Reconocer propiedades.
    - Distinguir propiedades: esenciales, necesarias, suficientes.
    - Identificar el concepto.
    - Definir.
    - Clasificar
    - Deducir propiedades.
2. Procedimientos lógicos asociados a juicios.
    - Determinar valor de verdad.
    - Transformación de juicios.
    - Modificar juicios.
3. Procedimientos lógicos asociados a razonamientos.
    - Realizar inferencias inmediatas.
    - Deducción por separación.
    - Refutación.
    - Realizar inferencia silogística elementales.
    - Demostración directa.
    - Demostración indirecta.
    - Argumentación
    - Realizar inferencias reductivas.

Centraremos nuestra atención en los procedimientos lógicos asociados a razonamientos. Estos procedimientos se utilizan con mucha constancia en la enseñanza y sin ellos es imposible el pensamiento pleno del hombre. Abordaremos en particular la deducción o razonamiento deductivo.

DESARROLLO:

La intención de elaborar una propuesta didáctica (PD)que mejore las condiciones del aprendizaje de las matemáticas requiere de un estudio minucioso, profundo y detallado del desarrollo del pensamiento. Al respecto, la Psicología cognoscitiva sostiene que lo que se aprende debe ser racional y estructurado: el problema principal al cual se enfrenta el estudiante consiste en relacionar un orden exterior con un orden interior; a ello la epistemología-psicología lo denomina "cultivo de la racionalidad". El alumno y el profesor saben que el contenido conlleva a la adquisición de un conocimiento nuevo; pero también deben saber que hay una lógica interna del problema planteado y que el alumno puede construir ese conocimiento sin apelar a una razón didáctica impertinente; de tal manera que el docente efectúa no sólo la comunicación de un conocimiento, sino también la transmisión de “un buen problema” (Brosseau, 1981). Por ello conviene tomar una posición teórica previa antes de planificar una PD; por cuanto en la medida en la cual se logra profundizar en un hecho, en esa medida el dominio sobre el conocimiento es mayor y mejor.

Por lo tanto una didáctica que pretenda fundamentarse en la experiencia (no en el empirismo) debería destacar cuáles son las experiencias necesarias para desencadenar la actividad lógico-matemática; la empiria no proviene de los objetos, sino de la actividad sobre los objetos (Piaget, 1982). Sin embargo, también hay que tomar en consideración que si bien la afirmación anterior puede ser cierta, el conocimiento proviene de las propiedades reales de la realidad y éstas son tan importantes como las operaciones sobre el objeto de conocimiento. La planificación de una PD que permita el acceso al aprendizaje lógico-matemático es “una necesidad social” e implica la “actualización” de la acción educativa. Sin embargo, los contenidos que intentan la modernización son solamente “contenidos en la preparación académica de maestros y pedagogos” y creemos que debe integrarse en la formación del docente un componente socio-político sobre el quehacer cotidiano.

Al respecto, muchas expresiones usadas en nuestras aulas son insatisfactorias. Tomemos el siguiente ejemplo:

> “Si se agregan dos segmentos de rectas a y b, la longitud del nuevo segmento se obtiene agregando la longitud de b a la longitud de a”. De acuerdo con Carnap (1985), en la primera parte de la expresión la recta parece ser un objeto físico y en la segunda incita a la realización de una operación aritmética. Probablemente esto se debe a que se interpreta la teoría matemática como un producto de los datos de la experiencia y, a su vez, porque consideramos la teoría como una copia de la realidad. Así mismo, una “propuesta didáctica” inadecuada origina incomprensión en los conceptos de fracción, que se confunda el área con el perímetro, no se desarrollen conceptos como los de volumen, peso, magnitud, entre otros y así oímos expresiones como: “no sabe como lo hizo, pero el resultado es correcto”. Una “propuesta didáctica inadecuada” es simplificada por Ávila (1991), de la manera siguiente (en un aula):

Profesor: Esta figura es un ... *(Muestra un trapecio)*	Alumnos: ¡trapecio!
Profesor: Vamos a calcular su ...	Alumnos: ¡Área!

Profesor: La fórmula para calcular su área es suma de las bases sobre ...	Alumnos: ¡Dos!
Profesor: Por la ...	Alumnos: ¡Altura!

Al respecto, Balbuena (1991), afirma que en muchos casos al enseñar la suma (o la resta) el maestro expresa que se "requiere sumar las decenas y escribir las decenas". Los autores sostiene que esta lógica es desconocida por el alumno, incomprensible; no sabe el por qué, para qué y que tales acciones implican un algoritmo para la operación, pero no para la abstracción.

Un PD (propuesta didáctica) adecuada planifica situaciones problemáticas que representan un reto para los alumnos. Al respecto, Fuchs (1969) sostiene que las expresiones lógico-matemáticas no poseen una condición espacial o sensorial, como muchos docentes suponen; afirma, además, que puede ayudarse con imágenes (que constituye una nueva manera de expresarse), y que ella misma no tiene que ser, necesariamente, abstracta; sino que probablemente posee un sustrato manifiestamente representable. Por lo tanto, la "propuesta didáctica" debe ir más hacia lo conceptual, que el signo. Al respecto, Frege (citado por Wittgenstein, 1993) sostiene que "los formalistas confunden el signo con el significado; que las expresiones lógico-matemáticas no son solamente rayas, sino que por el contrario, poseen vida".

Retomando lo expresado por Carnap, anteriormente citado, la adición de las dos rectas es posible si se expresa en un lenguaje deductivo que implique la suma de los valores cualitativos y no las longitudes de las rectas. Las líneas son configuraciones producto de la experiencia física, y así podemos llegar a pensar que se puede realizar: $L(a + b) = L(a) + L(b)$, y por el contrario, las líneas son configuraciones producto de la expresión sensorial. Un diseño instruccional productivo en el aprendizaje lógico matemático debería considerar como importante la construcción, en el estudiante, de una epistemología previa que permita distinguir la relación que hay entre un hecho como realidad física y el aspecto normativo del pensar y así mismo, la axiomática que conduce a la solución del problema a lo que nos referimos y por lo tanto, destacamos como importante la construcción de un marco de referencia lógico-matemático previo, es decir, que el estudiante aprenda a seriar, ordenar, clasificar, establecer relaciones, identidades, etc.

Un tema de investigación importante (a nuestro modesto entender) en esta área del conocimiento consistente en la proposición de PD(propuesta didácticas) dirigido a evitar los fracasos. Tal como sostiene Brosseau (1991) observamos en los docentes dos conductas características: por una parte, si los alumnos fracasan el docente tiende a proveer una "nueva oportunidad" (plantea un problema "igual al viejo") y en consecuencia, la solución se obtiene por la repetición y no por la comprensión. Por otra parte, el docente debe estar consciente que el proceso didáctico sufre también de "envejecimiento" que se observa en la repetición de los mismos procedimientos didácticos y que éstos no tienen el mismo efecto. Los autores observan que en aquellos procesos donde el docente interviene menos hay menor fracaso y "menos envejecimiento" (y preguntamos ¿qué se repite?: igual historia, análoga secuencia de estrategias, el mismo discurso, etc.)

La construcción de un marco de referencia lógico matemático requiere de una integración de las estructuras cognoscitivas previas a las posteriores que se adquieren a partir de las acciones del sujeto sobre el objeto y de la capacidad para discriminar las propiedades del objeto de conocimiento.

Aspectos Epistemológicos

En todo problema hay un cognoscente y un objeto por conocer, un contexto y las relaciones entre estos aspectos. Un problema donde aparezcan dos, tres cantidades que hay que restar, sumar, dividir o multiplicar no es un hecho, sino que el estudiante debe hacer una demostración lógica y matemática. De acuerdo con G. Vernaud (citado por Brosseau, 1991) no hay que confundir el cálculo algebraico que permita la solución de un problema con la lógica natural en la cual se apoya esa solución. Una característica (buena o mala) es la forma común de presentar los problemas: planteamientos y preguntas, los docentes deberían pensar si esta forma tiene virtudes y/o inconveniencias. En estos problemas aparecen expresiones como: "son", "igual a", "más", "mayor que", "menor que", "entre", "duplo", "exede","disminuye", etc. El alumno debe aprender a descodificar su significado (y más aún, que el estudiante debe someterse a una normatividad).

En el caso de la sustracción no es solamente una operación aritmética donde se "restan dos cantidades"; es un proceso consistente en una serie de suboperaciones jerarquizadas, consecutivas. Si el estudiante no desarrolla una visión globalizadora de la acción (cosmovisión), se pierde en el laberinto de las operaciones particulares y deviene el fracaso. Por lo tanto, hay que construir una PD que desarrolle la capacidad para tener presente, estar atento a la particularidad y la totalidad.

Un trabajo docente fundamentado en la realidad toma en consideración los objetos (entes matemáticos) que inventa (¿descubre?) el matemático y que éstos no se refieren a la experiencia, sino que su evidencia es puramente racional. Por ejemplo, el

número es un ente abstracto. Y además, la realidad de ese "ente abstracto" requiere de algunos criterios de aceptación: no contradicción, pertenencia a una clase, intuición del objeto y, además, que la abstracción matemática es una experiencia psicológica y motivacional (afectiva). Algo que se ha observado en los docentes al planificar una PD es que su deseo de enseñar a través de las actividades familiares lo puede conducir a la sustitución de la verdadera problemática por una artificial y peor aún "presentan las dos problemáticas yuxtapuestas" y así llegan al "mejor compromiso" (Brosseau, 1991).
El aprendizaje debe tender al desarrollo de estructuras cognoscitivas que permitan acceder al conocimiento con el "menor desgaste posible". Sabemos que las personas están en capacidad para realizar inferencias ya que la vida mental comienza con la percepción del objeto de conocimiento (noción de número, clase, espacio, tiempo, etc.). Sin embargo, hay ciertas partes del objeto de conocimiento que los alumnos no perciben (pero puede haber una ligera sospecha de que están ahí) y si no sabe es porque no ha desarrollado la capacidad para "estar consciente" que esas partes están ahí. Por otra parte esa vida mental posee la particularidad de ser solidarias con las operaciones interiorizadas (Piaget, 1974).
La vida mental de las personas es un producto de las experiencias obtenidas en unas relaciones sociales, que su conocimiento es producto de un desarrollo en el tiempo y que en el caso de las ciencias (lógico-matemática) su origen epistemológico se remonta, probablemente, hasta los griegos o antes. Es este conocimiento producido por el esfuerzo del hombre a través del tiempo el que debe ser asimilado por el alumno.
Así mismo, es importante determinar la influencia de las estructuras aprendidas mediante el lenguaje, que preparan al sujeto para resolver un problema. Conviene pensar en la influencia que pueda ejercer el desarrollo de la capacidad para ordenar, calcular, clasificar y hasta qué punto estas estructuras están relacionadas con el lenguaje. Un ejemplo de ello lo constituye la siguiente expresión, muy común en los textos: "Sea ABC un triángulo cualquiera" esta expresión no menciona un triángulo particular (isósceles, escaleno, rectángulo); el estudiante debería saber que la expresión se refiere a una figura geométrica que tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y que puede ser "cualquiera". Por lo tanto, un estudiante para poder (tener capacidad para) resolver un problema tiene que "saber escaparse de los lazos tendidos" (harpedopnates).
Al respecto, Hamwkins (1974) sostiene la imposibilidad de "enseñar" los conceptos significativos (que reducen las redundancias y ordenan la percepción del mundo). Los autores afirman que el alumno puede pensar en la palabra, en el sustantivo que

designa el concepto, pero que los conceptos se aprenden cuando el significado del mismo "está incluido en la economía de la experiencia personal" y por lo tanto pueden ser codificados y decodificados.

De acuerdo con lo que sabemos hasta ahora todo problema tiene un planteamiento y una pregunta que conforman los datos que deben, a su vez, ser confrontados. El "resolvedor" necesita "inventar y/o descubrir" una(s) estrategia(s) (algoritmo) que le permita(n) solucionar el problema. El algoritmo es un esquema general compuesto por una serie de operaciones intelectuales seleccionadas previamente. Al finalizar la solución, el estudiante necesita confrontar los resultados con los datos expresados en el planteamiento. El siguiente esquema puede que proporcione una idea más acertada de lo expresado.

Hipótesis Psicológicas

A continuación se describen algunos problemas-tipos y se proponen algunas hipótesis psicológicas que consideramos probablemente pertinentes:

1. Problemas tal como: "Pedro tiene 5 lapiceros y Juan 4; ¿Cuántos lápices tienen los dos, en total; cuánto más tiene Pedro, cuántos menos tiene Juan?. Otro ejemplo es el siguiente: "En la biblioteca hay 125 revistas, de las cuales 70 son de matemáticas; ¿Cuántas hay de otra especialidad?

El algoritmo lógico-matemático es del siguiente tipo:

$$a + b = x \quad ; a - b = x$$

Como se hizo énfasis anteriormente no es una "simple suma o resta", sino que en su solución están implicadas la seriación, clasificación, etc. Problemas con estas características (y más complejos) son estudiados bajo el algoritmo lógico-matemático: $3x - 2 = y$. Los autores sostienen que se les puede presentar a los alumnos problemas más complejos para que descubran parejas de números enteros mediante ecuaciones lineales, tal como:

$$(0.3) + 2 = \mathbf{?}$$

Así mismo, los niños mediante una PD bien planificada adquieren la capacidad para resolver problemas "con variables y mediante la aritmética de los números con signos" en un contexto significativo y así llegar a resolver ecuaciones cuadráticas, tales como:

$$(0.0)(5.0) + 6 = \mathbf{?}$$

Y progresivamente hacer más complejas las ecuaciones, tal como:

$(0.0)-(20.0)+96=?$

Para que el alumno descubra las reglas de los “coeficientes en las ecuaciones cuadráticas”.

Problemas de este tipo exigen establecer la relación numérica entre dos variables: “Pedro tiene más o menos lapiceros que...”. Los alumnos comúnmente no comprenden la relación entre los componentes del problema. Mayer (1992) cita a Hudson y destaca un experimento en el cual el segundo autor exigió a un grupo de niños resolver problemas como el siguiente:

“Hay cinco perros y 3 platos con leche. ¿En cuánto superan los perros a los platos?”

Solamente el 61% de los niños de Segundo Grado dio la respuesta correcta. pero al cambiarle la redacción por:

“Hay 5 perros y 3 platos con leche. ¿Cuántos perros tomaran leche? el 100% de los niños resolvieron el problema; es decir comprendieron el problema.

De acuerdo con Mayer (1992) los resultados nos inducen a pensar que la incomprensión de las palabras trae como consecuencia la incapacidad para resolver el problema y que si las palabras no están en la “amalgama cognoscitiva” del niño se producen errores...Mayer se pregunta por qué las personas tienen dificultades para expresar la relación entre dos o más variables numéricas y responde que la causa es la inexistencia de estructuras cognoscitivas básicas (unas más que otras) y por otro lado que es más fácil establecer relaciones entre valores numéricos cuando éstos están “señalados en el problema” y que cuando el niño tiene que imaginar la relación tiende a cometer más errores.

La psicología cognoscitiva supone que muchos niños no han desarrollado las estructuras lingüísticas apropiadas para representar el problema en la memoria. Por ejemplo, Mayer (1992) cita a More, Lewis y Mayer quienes sostienen que en algunos problemas “la palabra clave” induce a realizar una operación distinta y origina un conflicto. En los problemas propuestos en el apartado 7. (Ver más adelante), la palabra “más” predispone para resolver el problema mediante una adición: “Un obrero gana $385 mensualmente. Gasta $155 en víveres. Luego gasta $183 más; cuánto le queda?

Si nos atenemos al diagrama presentado en los siguientes problemas se requiere de los pasos:

A. “Un comerciante vende 300 cajas de tomates a $80 cada una, y recibe dos pagos adelantados: uno por $12000 y otro por $70000; ¿Cuánto le adeudan?

Sintaxis	vende 300 cajas de tomates a $80 Recibe $12000 y $7000
Semántica	a $... la caja. Y recibe como pago adelantado... ¿Cuánto le adeudan?
Algoritmo	Es un problema donde hay que multiplicar 300 cajas por $80 para encontrar el valor total de los tomates.
Supervisión Estrategias	Sumar los dos pagos adelantados y restar el valor total de las cajas de tomates.
Operaciones Selectivas	300 Caj. x $300 = 24000 (Precio total del tomate) 1200+7000 = 19000 (total de pagos adelantados) 24000 - 19000 = 5000 (Restar el precio total del tomate menos los pagos adelantados)

Un aspecto importante, que debe ser tomado en cuenta en el aprendizaje de estrategias para la solución de problemas, es la representación (Bruner, 1966). Las personas, de acuerdo con Bruner, pueden representarse el mundo en términos de: una acción (Inactiva), de una imagen perceptiva estática (Icónica) o a partir del lenguaje y de los símbolos (Simbólica). La representación que exigen el problema anterior y el que sigue es del tercer tipo: la solución requiere que haya una representación sintáctica y semántica.

"Un estudiante gastó $32 comprando dos cuadernos, un bolígrafo y dos libros. Los libros cuestan 6 veces más el valor de los cuadernos y el bolígrafo dos veces más el valor de los cuadernos; cuánto cuesta cada objeto?

Sintaxis Representación	Un alumno gastó $32. Compró dos cuadernos, un bolígrafo y dos libros. ¿Cuánto cuesta cada objeto?
Semántica	...6 veces más...; 2 veces más...
Algoritmo	Problema donde hay que establecer una incógnita

Planificación	x valor de los cuadernos.
Supervisión	Hay que establecer los productos: 6 veces más, 2 veces más. Se suman las incógnitas y resulta 9x. Se divide $32 entre 9 para encontrar el valor de los 2 cuadernos = $4. El valor de los libros es 6(4), es decir 6 veces más el valor de los cuadernos. El valor del bolígrafo es 2(4), es decir 2 veces más el valor de los cuadernos.

2. En problemas tal como el que sigue: "Miguel tiene $657 gasta cierta cantidad y le quedan $120; ¿cuánto gastó (le queda)?. Un problema de este tipo representa un algoritmo lógico-matemático como el que sigue.

$a - x = b \quad ; \quad x - a = b$

La solución de un problema de este tipo requiere el desarrollo de estrategias cognoscitivas como la clasificación y reconocer que la resta es una operación inversa de la suma (reversibilidad).

3. Problemas representados en el algoritmo lógico-matemático, tal como:

$a + (a + b) = x ; a + (a - b) = x ; a + ab = x$

Ejemplos de estos problemas son: "Carmen necesita 30 libros y Nereida 5 más (o 5 menos); ¿Cuántos libros necesitan en total"?.

"Pedro tiene una caja con 6 colores y Raúl una caja con 2 veces más colores (2 veces menos); ¿Cuántos tienen en total?

Un problema con estas características no puede ser resuelto en una sola operación. Para solucionarlo es necesario hallar el segundo término. El estudiante debe desarrollar la capacidad para reconocer que los datos por sí solos no determinan la solución. Así mismo, desarrollar la capacidad para discriminar una redacción simplificada de los datos y sustituir el valor relativo de los mismos por su valor absoluto ("2 veces más"), lo que, en muchos casos, confunde y lo induce a aplicar un algoritmo deformado:

En lugar de $a + (2a) = x$; lo soluciona mediante un $a + b = x$.

4. Problemas cuyo algoritmo lógico-matemático representativo es del tipo:

$a + n = x ; x + m = z ; a + (a + b) + (a + b) - c = x$

El siguiente ejemplo (aproximado) aparece comúnmente en pruebas para evaluar a quienes desean ingresar en alguna institución y así medir su inteligencia numérica abstracta: "Pedro tiene 15 años, su mamá 25 años más que ella, su papá 5 años menos que la mamá; ¿Cuántos años tienen los tres?. Otro ejemplo: "Un constructor está fabricando 3 casas. Cada uno de los dueños le pagan $100000. Le paga a los obreros un 25%; ¿Cuánto le queda?

- $\Rightarrow$ En este caso, el alumno necesita desarrollar un algoritmo compuesto por una serie de operaciones (estrategias) que siguen una secuencia (orden) determinado y cada una de las operaciones depende de la que le precede. El alumno necesita tener almacenado en la MLP (Memoria a Largo Plazo) la operación precedente y llevarlo a la MCP (Memoria a Corto Plazo), por cuanto es el punto de partida de la subsiguiente. Exige la conservación de las estructuras cognoscitivas (equilibrio) y un encadenamiento (seriación, orden). Sin embargo, el almacenamiento del contenido no es suficiente para obtener el logro en la solución de un problema. La Psicología cognoscitiva supone la existencia de un mecanismo que guía la búsqueda de los contenidos y que permite, a su vez, relacionar las estructuras cognoscitivas cuando no se almacena de la manera prevista.

El primer problema mencionado en ejemplo 4 exige una serie de operaciones homogéneas de adición o sustracción (si tal es el caso) y el segundo de diversas estrategias (división, sustracción, multiplicación).

5. Problemas tales como: "Un niño tiene 5 años. Dentro de 15 años su padre será 5 veces mayor que él; ¿Cuál es la edad actual del padre?" En problemas de este tipo (que también se observa en pruebas de selección e ingreso) quien resuelve necesita aplicar algoritmos lógico-matemáticos como el siguiente:

$a+b=x$, $xm=y$; $y-n=z$ (inversión)

El alumno necesita combinar los elementos desconocidos y relacionarlos con operaciones auxiliares. La respuesta no se deduce inmediatamente. Lograr la edad del padre es posible si previamente se calcula la edad del hijo al término de un tiempo determinado (5+15) y realizar (5+15)3 = x. El resultado es producto de una serie de operaciones (estrategias cognoscitivas) auxiliares y abstractas. En el caso de x. m = y un ejemplo sería el siguiente: "En una caja hay 24 lápices; ¿Cuántos hay en 89 cajas?

6. Existe un grupo de problemas que requieren la confrontación de dos ecuaciones y el uso de una estrategia auxiliar. Los dos ejemplos siguientes son representativos de lo que estamos exponiendo: "Un bolígrafo y un cuaderno cuestan $ 780; dos bolígrafos y un cuaderno cuestan $ 1170; ¿Cuánto cuesta un bolígrafo y un cuaderno?. Otro ejemplo: "Tres pescadores han recogido 410 kilos de pescado, el primero y el segundo han pescado 280 kilos; el segundo y el tercero 240 kilos; ¿Cuánto ha pescado cada uno?
En estos ejemplos todas las magnitudes son incógnitas. El "resolvedor" necesita pensar que la solución es por la vía de las ecuaciones. La solución a una incógnita se obtiene mediante estrategias cognoscitivas auxiliares (sustracción del total, adición de los resultados, cálculo del total y sustracción del resultado último). El algoritmo necesita la conservación del conjunto y luego plantear una serie de operaciones auxiliares.
Los algoritmos son de los tipos:
$x + y = a$; $nx + y = b$; $x + y + z = a$; $x + y = b$; $y + z = c$

7. Muchos problemas se redactan de tal manera que el algoritmo aprendido entra en conflicto (contradicción) con un problema tipo (estereotipo) previamente aprendido. La solución requiere que el estudiante triunfe sobre el estereotipo. Los siguientes ejemplos son característicos: "Un padre tiene 49 años; tiene 32 años más que su hijo; ¿Cuántos años tienen entre los dos (cada uno)? Otro ejemplo es el siguiente: "Un obrero gana $. 245 mensualmente, gasta $ 97 en víveres. Luego gasta $ 45 más; ¿Cuánto le queda? La palabra "más" predispone para realizar una adición; pero la disposición de los datos converge para una operación inversa. Otro ejemplo es el siguiente: "Un pedazo de madera mide 2,5 mts. y produce una sombra de 7,5 mts.; ¿Cuántas veces es más larga la sombra que el trozo de madera?". La redacción del problema y el aprendizaje mecánico conducen al alumno para que realice una división (7,5 mts. : 2,5, mts); sin embargo, un detallado análisis del planteamiento del problema necesita de la interpretación del "valor relativo" de lo más largo" (7,5); separarse de los objetos concretos (abstraer los objetos madera y sombra) y representarse la longitud como una magnitud. El alumno debería adicionar a la longitud de la madera el "más largo". La dificultad fundamental consiste en liberarse del estereotipo ("problema tipo"); la decodificación de los datos y luego plantear una estrategia de solución (algoritmo).

8. Una “propuesta didáctica” adecuada diferencia el lenguaje cotidiano del lenguaje lógico-matemático (formal). Citemos el siguiente ejemplo; “cuando tengo hambre, busco comida” Si requerimos la transformación de esta expresión lo hacemos de la siguiente manera:
“cuando tengo hambre” lo sustituimos por (X)
“busco comida” lo sustituimos por (Y) y construimos “X, entonces, Y”
Es decir, convertimos las expresiones en “variables” (símbolos cuya significación no está definida). Al respecto, H. Poincaré afirma que la ciencia matemática no tiene por objeto explicar la naturaleza de las cosas. Su objetivo consiste en enlazar las leyes que nos permiten estar conscientes de la experiencia y que no podríamos expresar sin la ayuda de las matemáticas (citado por Fuchs, 1969). Una característica fundamental del lenguaje matemático es que debe carecer de ambigüedad, hay una cierta ordenación, una axiomática (Ej.: “latice” significa para todos los matemáticos “unión” y así queda entendido). Por otro lado un concepto matemático es una herramienta que debe efectuar un trabajo muy bien definido, eficiente y eficaz. Al respecto, Wittgenstein afirma que “la profundidad de la razón del significado corresponde a la profunda necesidad de un convenio construido” (que podría constituir un “lenguaje sociológico”).

9. Algunos problemas requieren, para su solución, el planteamiento de un algoritmo lógico-matemático como los siguientes:
$x + y = A; x = xy; x - y = A; x = y - z$
Ejemplo de algunos problemas: “En 2 cajas hay 184 lápices. Una de las cajas contiene 2 veces más que la otra; ¿cuántos lápices hay en cada caja?” Otro ejemplo: “En 2 recipientes hay 24 litros de agua. Uno de los recipientes contiene 3 litros más que en el otro; ¿cuántos litros hay en cada uno?”
El primero de los problemas se resuelve calculando el número de lápices y luego se consiguen las tres supuestas partes; para ello se requiere que el “resolvedor” elabore una estrategia cognoscitiva auxiliar, arbitraria y abstracta y así superar la tendencia a resolver el problema por operaciones directas y sin aplicar la abstracción.
En ambos problemas el alumno necesita encontrar las diferencias entre un algoritmo previamente aprendido y otro que tiene que ser creado. Así mismo, descubrir una estrategia cognoscitiva que conduzca a la solución del problema. El requiere de un análisis detallado de las operaciones que involucran la totalidad del proceso.

Deficiencias Cognitivas y como superarlas

Previo a los próximos planteamientos conviene hacer la siguiente observación: La psico-neurología sostenida por A.R. Luria (1980) intenta explicar que ciertas lesiones físicas ocasionan un déficit intelectual. La psicología cognoscitiva sostiene que si no se han desarrollado las estrategias pertinentes se producen los "fracasos escolares". Ambas teorías postulan que mediante una "propuesta didáctica" pertinente se pueden superar esos déficit.

Todo proceso para "deshacer un lazo tendido" y llegar al éxito requiere que el actor real describa cómo se representa los datos del problema y la pregunta del mismo: necesita conservar los elementos esenciales que incluye la percepción y representación de las correspondencias (uno a uno, uno a varios), si ordena las partes en una totalidad (síntesis de los elementos); por otra parte, si conserva la pregunta principal, si reproduce los datos perfectamente. Si existen estas deficiencias se observa que el alumno repite oralmente o en su mente los datos y no resuelve el problema. Por lo tanto, conviene a los intereses del aprendizaje la conservación de los datos, la pregunta, la orientación del acto y no menos importante es la actitud para proceder a la solución del problema. Todo quien pretenda "deshace lazos tendidos" necesita inventar, crear o descubrir un proyecto de solución del problema. Comúnmente un proyecto de esta naturaleza presenta tres tipos de fallas que deben ser descubiertas por el docente y el alumno para que sean subsanadas. Nos referimos a deficiencias en el intelecto tales como: en la ejecución de la operación, en la conservación de la totalidad de los elementos y la formulación, en el plano del lenguaje, de los datos del problema.

Una deficiencia común en los alumnos es la incapacidad para formular un plan e intentar resolver el problema directamente. Por otra parte, puede pretender realizar la solución reemplazando las operaciones pertinentes por un estereotipo, el docente y el alumno deben estar atentos ante la aparición de "ruidos" que desvían la atención y conducen al "enrarecimiento del contexto". Por todo ello se recomienda que se "tome conciencia" del algoritmo que soluciona el problema y de los errores cometidos.

En conclusión, una PD es una guía para que los alumnos tomen conciencia de la solución pertinente, para que realicen un análisis detallado, sistemático, de las estrategias cognoscitivas viables y de los errores cometidos. Así mismo, esta PD debe estar en capacidad para detectar la incapacidad para responder a la pregunta, para no dar razones pertinentes de las estrategias lógico-matemáticas y cognoscitivas, para descubrir las repeticiones redundantes y mecánicas, incapacidad para confrontar los

datos y los resultados (Ej. "Edad del capitán") y aquellos alumnos que muestran que no son conscientes de los errores.
Ahora bien, la PD debe estar en capacidad para proponer las estrategias de Enseñanza y aprendizaje que le permitan al alumno tomar conciencia, analizar al algoritmo y representarse el contexto del problema. Esto es posible si el docente desarrolla la suficiente capacidad para constatar las deficiencias e investigar las estrategias cognoscitivas y lógico-matemáticas que conducen a los logros prometidos. Un docente-investigador indaga sobre la evolución de esas deficiencias y también el desarrollo de las estructuras antes mencionadas; y si existe una deficiencia, propone, entonces, una alternativa que le permita a los alumnos la "compensación de los errores". Todo ello es posible si la PD asegura la "correspondencia entre las estrategias de enseñanza-aprendizaje compensatorias y las estructuras que no han sido desarrolladas" (Luria, 1991).
En cuanto al hecho lógico-matemático, el docente-investigador debe realizar un análisis detallado del desarrollo de estas estructuras para "superar las fallas" dejadas por la PD que ha sido realizada sin pertinencia. De tal manera, que la PD pueda convertirse en una herramienta de investigación del pensamiento en la actividad lógico-matemática. El docente-investigador estudia las transformaciones sufridas por las estructuras lógico-matemáticas y no solamente las deficiencias. Suponemos que podría elaborarse, así mismo, una PD como "método para la compensación de las deficiencias y los errores". Un programa definido así postula las intenciones de la institución y de las personas involucradas en el proceso de enseñanza, realiza un análisis de las tareas y contenidos y propone, rigurosamente, las operaciones que implican la solución del problema como una totalidad.
Una investigación planteada así puede muy bien mostrar las causas de la incapacidad, donde están (en el docente, en la docencia, en el alumno), permite establecer las relaciones pertinentes entre los elementos del pensamiento en un sólo hecho". Esta capacidad es primordial para el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Así mismo, para que los alumnos logren la ordenación, seriación y clasificación es necesario "tomar conciencia" de esas estructuras, es decir, realizar una seriación, ordenación y clasificación al interior (Luria, 1981 y Piaget, 1987). Por ejemplo, en el caso de la adición y sustracción para "llevar" y "pedir prestado" es necesario que el alumno "tome conciencia" de "el número que viene del lado derecho" y que se le asigna a la cantidad del lado izquierdo (Luria, 1981).
El lenguaje constituye una vía universal para la transmisión del conocimiento lógico-matemático y una herramienta auxiliar en el desarrollo de las estructuras cognoscitivas

pertinentes. Por ello es necesario encontrar una estructura lingüística ajustada a la experiencia y que le permita al alumno explorar el contexto del problema. Por ello, enseñar-aprender implicaría la elaboración de una PD que trae como consecuencia la comprensión e interrelación de los conceptos lógico-matemáticos.

Una línea de investigación importante, para el docente, lo constituye la indagación de la importancia del lenguaje en la adquisición de los conceptos lógico-matemáticos. La percepción y la representación del lenguaje podría indicar el éxito o el fracaso en la solución de un problema; de tal manera que la eficacia y la eficiencia en la solución del problema tan aparentemente sencillos como los de adición y sustracción depende de la capacidad para comprender los conceptos lógico-matemático fundamentales (Resnick y Ford, 1990).

Tal es la importancia adquirida por el lenguaje que la Psicología cognoscitiva ha volcado gran parte de su investigación sobre la "memoria semántica" y postula la "teoría de redes" que intenta explicar el almacenamiento y la organización del conocimiento.

CONCLUSIONES:

Nuestra experiencia docente nos ha demostrado que estas consideraciones son realizables en la práctica escolar y las potencialidades de la asignatura matemática para a través de ella enseñar estos procedimientos lógicos y con ellos contribuir al desarrollo del pensamiento lógico de los escolares, si se diseñan tareas pedagógicas conscientemente planificadas para lograr este objetivo.

La inclusión de ejercicios en la PD, en los cuales la conclusión es solo probable, o sea no se tienen todos los elementos para afirmar o negar es acertada. Esto evidencia un incremento en la actitud reflexiva de los alumnos, provocado por el enfrentamiento a estas situaciones indeterminadas lo cual no es una práctica habitual en nuestras escuelas.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Avila, A. (1991) Reforma a las matemáticas en Primaria. Lo Posible y lo Necesario. Educación Matemática. 3(3).
2. Acosta, I. (1995), Una estrategia alternativa para el trabajo metodológico dirigido a contribuir al desarrollo de las habilidades para demostrar proposiciones matemáticas en el nivel preuniversitario, tesis

en opción al grado de doctor en ciencias pedagógicas, ISPEJV, La Habana.

3. Balbuena, H. y Otros. (1991) Reflexiones en torno a la modernización educativa. El caso de las matemáticas en los primeros grados de primaria. Educación Matemática.
4. Brosseau, G. (1991) Fondements et Methodes le Didactique de Mathematiques. Rechercher en Didactique de Mathematiques. Grenoble. La Pensée Savage. Vol 7. N? 2. (Mimeografiado).
5. Campistrous, L. (1993), Lógica procedimientos lógicos del aprendizaje, ICCP, La Habana.
6. Carnap, (1985) Fundamentación lógica de la física. Orbis.
7. Colom, A.J. y J-V. Mélich (1994). Después de la modernidad. Paidós.
8. David, R. (1974) El descubrimiento en la enseñanza de la matemática. Aprendizaje por descubrimiento. Evaluación Crítica. Trillas.
9. Durán, A. (1997), Una propuesta didáctica para el desarrollo del procedimiento lógico de deducción en el nivel secundario, ponencia presentada en el congreso internacional Pedagogía 97, La Habana.
10. Fuchs, W. (1969). El libro de la matemática moderna. Omega.
11. Hamwkins, D. (1974) Cómo aprender lo que no se puede enseñar. Aprendizaje por descubrimiento. Trillas.
12. Luría, A.R. y L.S. Tsvetkova. (1981). La Resolución de problemas y sus trastornos. Fontanela.
13. Mayer, R. (1992) Problem Solving, Cognition. W.H. Freeman and Co. NY.
14. Piaget, J. (1974). Estructuralismo. Orbis.
15. Piaget, J. (1982) El punto de vista de Piaget. Lecturas de Psicología del Niño. Comp. Juan DelVal. Tomo 1. Alianza-Universidad.
16. Resnick, L.B. y W.W. Ford. (1990). La Enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidós. MEC.
17. Vernaud, G. (1979) Validez de la obra de Juan Piaget. Dossier Wallon-Piaget. Gedisa.
18. William, L.V. Aprender con todo el cerebro. Estrategias y modos del pensamiento: Visual, metafórico y multisensorial. Martínez-Roca (1996).
19. Wittgenstein. L. (1993). Cuaderno Azul. Tecnos.