Coordenadas en Cabri Geomètre II.
Un acercamiento al Análisis y la Estadística.

Onofre Monzó del Olmo. Proyecto T^3 España. onfre.monzo@uv.es
José Antonio Mora Sánchez. Proyecto T3 España. jamora@ctv.es

Resumen:

En este taller se presenta una colección de archivos informáticos realizados con el programa Cabri Geomètre II que utilizan las posibilidades de la geometría dinámica para el tratamiento de coordenadas y funcione que se pueden utilizar para acercar a los estudiantes algunos conceptos de Análisis y Estadística de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Los diseños realizados son interactivos: están diseñados para que los coeficientes de la expresión algebraica sean modificados y podamos observar los cambios producidos en su gráfica para extraer conclusiones. De la misma forma, la inclusión de elementos móviles como la posibilidad de recorrer la curva favorece un acercamiento intuitivo al estudio de funciones. En el enfoque propuesto intervienen tanto el estudio global del comportamiento de diversos tipos de funciones, como un análisis más detallado de sus características, se estudian la recta, la parábola, la hipérbola, las funciones exponencial, logística, trigonométricas, etc. Además permite un acercamiento a conceptos clave en las matemáticas del bachillerato como son el límite de funciones, la derivada la integral o la recta de regresión.

Por otra parte, la conjunción de procedimientos analíticos y geométricos permite el tratamiento de algunos problemas prácticos desde diversos puntos de vista que confluyen en el estudio de la situación como son el geométrico, el gráfico y el algebraico, como es el caso de la construcción de rectángulos de perímetro constante o de paralelogramos articulados

El trabajo práctico en el taller se iniciará con la manipulación de modelos ya construidos para analizar las posibilidades didácticas de su utilización en clase. Más tarde los participantes serán los que realicen algunas construcciones.

1. La recta.

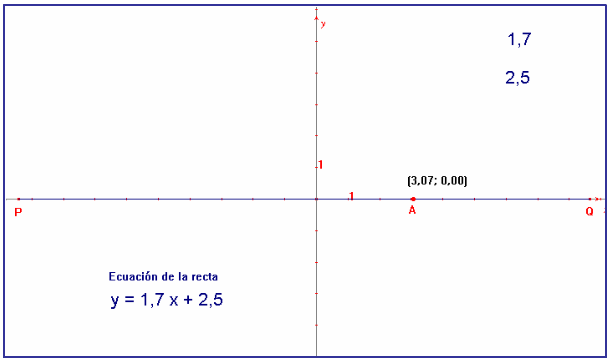
En primer lugar detallaremos los pasos necesarios para diseñar un archivo que permita dibujar una recta e intervenir para modificar sus coeficientes. Partimos de la expresión explícita de la función lineal **y =ax+b** en la que **a** es la pendiente y **b** es la ordenada en el origen. Dibujaremos la gráfica de funciones lineales de forma que sea posible introducir cambios en estos dos parámetros y, con ellos se modifique la gráfica dibujada para que los estudiantes puedan comprobar el efecto de las variaciones en esos parámetros.

a) Definición del dominio de la variable independiente.

- *Mostrar los ejes*.
- Dibujamos un *Segmento* con extremos sobre el eje horizontal que será el intervalo sobre el que vamos a tomar los valores de x (el dominio).
- Colocamos un *punto* sobre el segmento dibujado.

b) Expresión algebraica de la recta.

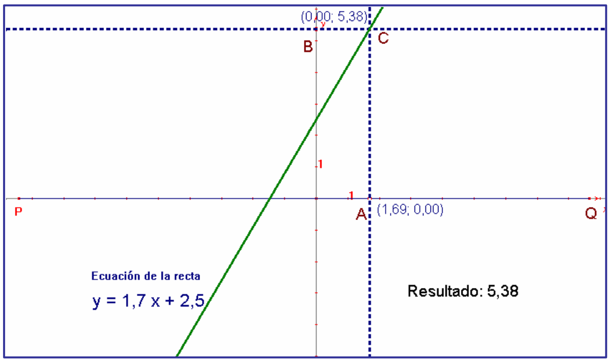
- Con *Edición Numérica* escribimos los números **1,7** y **2,5**. Estos números serán los valores que tomamos inicialmente como pendiente y ordenada en el origen
- Creamos en la parte inferior un *Comentario* alargado que comienza por **y =** seguido de uno de los parámetros (señala **1,7** con el puntero y haz clic), después escribe **x**, seguido del signo **+** y del otro parámetro **2,5** (también lo tomamos de la edición numérica).
- En este momento ya podemos ocultar las ediciones numéricas de **1,7** y **2,5** ya no serán utilizadas posteriormente.



c) Dibujo de la función.

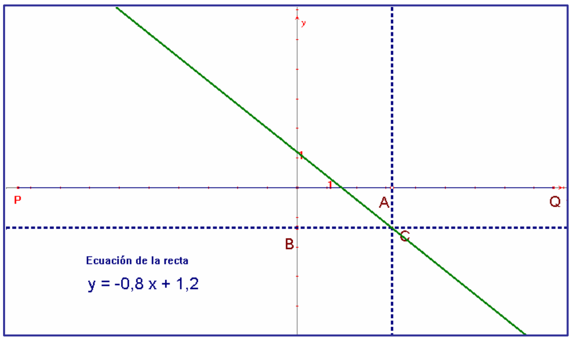
- Con *Ecuación y coordenadas* obtenemos las coordenadas del punto **A** (en realidad sólo nos interesa la abscisa ya que la ordenada es 0).

- Activamos la *Calculadora* para obtener el valor numérico de la función para el valor de la abscisa del punto **A**. Cuando tenemos el resultado, lo colocamos sobre la pantalla
- Con *Transferencia de medidas* llevamos el resultado obtenido sobre el eje de ordenadas. Esto nos lleva a un punto **B** sobre el eje cuya ordenada es el valor obtenido
- Con *Recta perpendicular* dibujamos las perpendiculares a los ejes por los puntos que representan las variables dependiente e independiente de la función. El punto **C** de intersección de estas rectas muestra uno de los puntos de la gráfica de la función.
- Utilizamos *Lugar Geométrico* de **C** respecto de **A** para obtener la gráfica correspondiente al dominio.



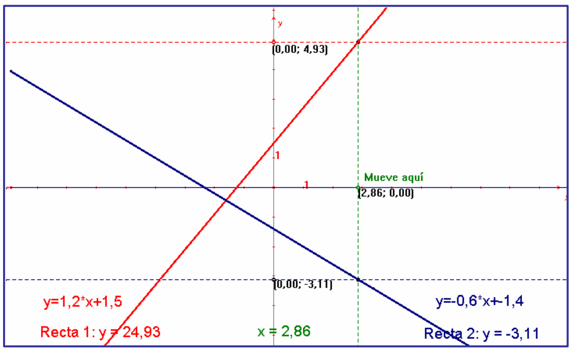
d) Exploración de la gráfica de la función.

- Para modificar la ecuación coloca el cursor sobre uno de los dos parámetros. Utilizamos las flechas hacia arriba y hacia abajo para incrementar el valor del coeficiente.
- El incremento puede ser mayor o menor dependiendo del lugar donde coloques el cursor en el número (el dígito que se incrementa es el que está a la izquierda de la posición donde colocamos el cursor).
- Podemos hacer que el punto **C** recorra los valores de la gráfica si realizamos la *Animación* de A sobre el segmento **PQ**.

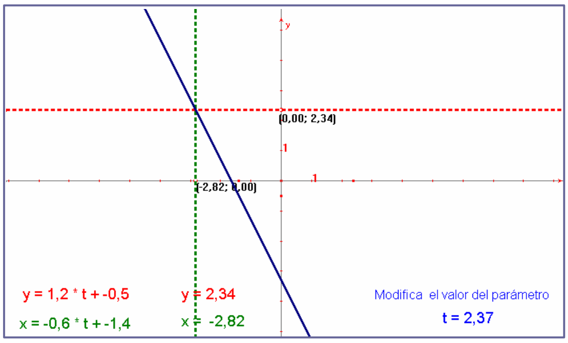


Ver Recta

e) El trabajo con rectas admite nuevas posibilidades como:

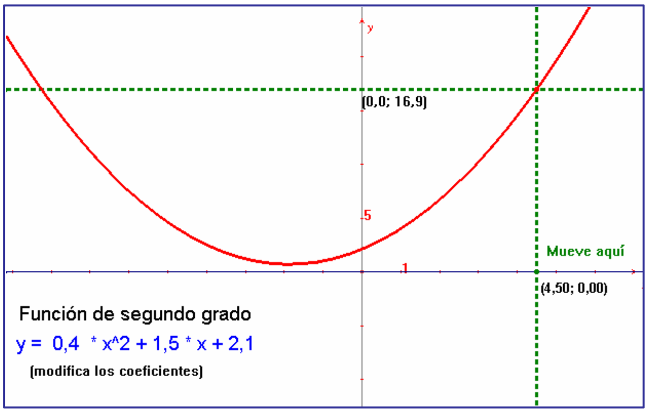


- Dibujar dos rectas con las normas dadas anteriormente y estudiar la posición relativa y el punto de corte. Modificar las ecuaciones y estudiar el comportamiento: paralelismo y perpendicularidad. Ver [Corte de dos rectas].



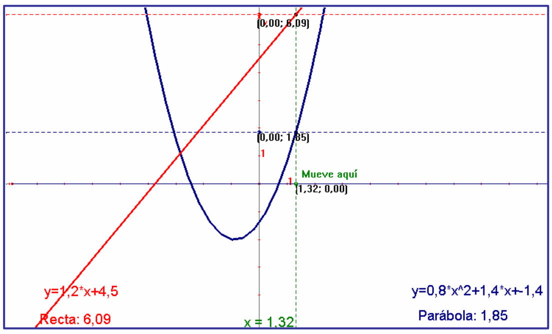
- O estudiar la [posición relativa] de dos rectas.
- Estudiar las rectas en su forma [paramétrica.]
- Estudio de [inecuaciones].

2. Otras funciones.

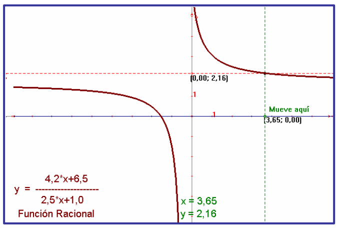


- Podemos dibujar funciones [cuadráticas], (hay que preparar tres elementos de *Edición numérica* para los coeficientes), En la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es interesante hacer cambios en cada uno de los coeficientes y comprobar las transformaciones que provoca cada uno en la forma de la parábola. Los cambios se ven mejor si escribimos la ecuación en la forma $y = a(x-b)^2 + c$. Ver [cuadrática 2].
- Del mismo modo podríamos dibujar la polinómica de cualquier grado. Ver [cúbica].

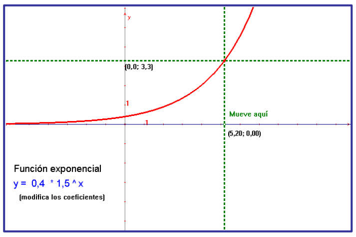
- En el punto de corte de una recta y una parábola, podemos hacer que la recta sea paralela al eje de abscisas (**y=k**) y comprobar que el vértice está situado en el punto medio de los puntos de corte aprovechando el eje de simetría vertical de la parábola. Ver [Corte de recta y parábola]().



- También podemos dibujar como las racionales y la función exponencial.



y= (ax+b)/(cx+d)

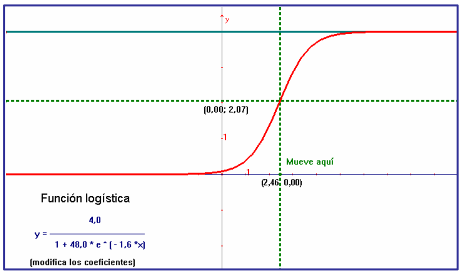


y= a b^{x}

  Ver [Racional]().
  Ver [Exponencial]().

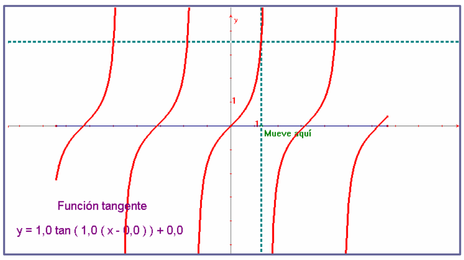
- Otra función interesante es la [logística]() que explica la evolución de muchas especies vivas. Es del tipo

$$y = \frac{A}{1 + B * e^{-kx}}$$

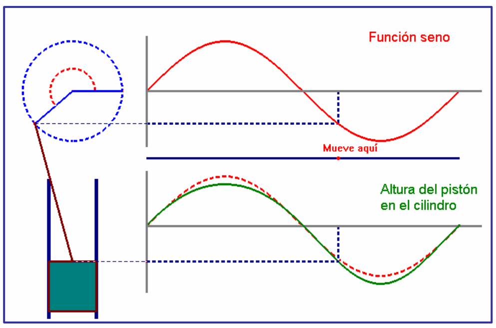


  En ella podemos encontrar significados los parámetros del tipo “cantidad máxima de individuos” o “velocidad de crecimiento de la población”.

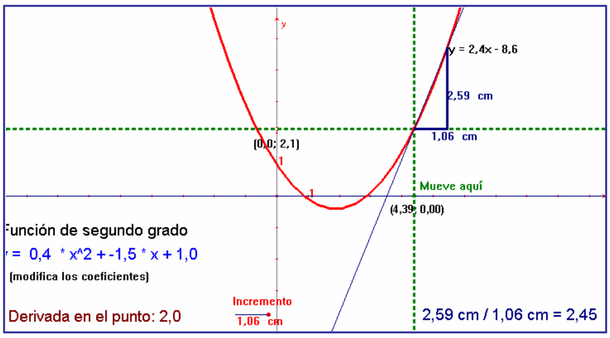
- De la misma forma podemos analizar las funciones trigonométricas: [seno](), [coseno]() y [tangente]().



- Se puede comparar la función seno con el movimiento del émbolo en el pistón del motor de [explosión]()

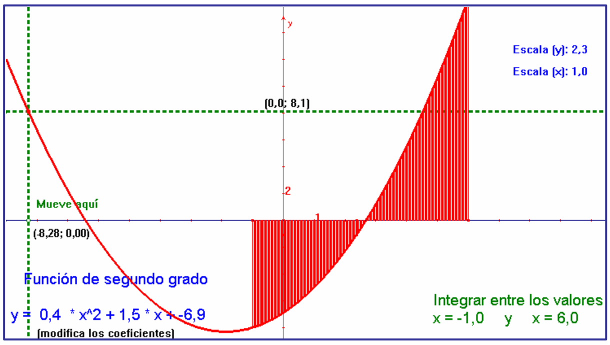


3. Los conceptos de derivada e integral

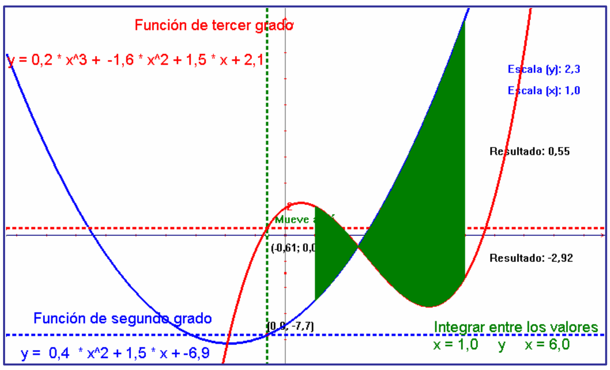


Cabri puede aportar significado geométrico al concepto de derivada. Dada una función de las estudiadas anteriormente, p.e. la cuadrática, podemos tomar un segmento de longitud variable que indique el incremento que tomamos en la variable independiente a partir de un punto cualquiera, dibujar el incremento medido sobre la ordenada y trazar la recta secante. Para que se dibuje la tangente no tenemos más que hacer el incremento todo lo pequeño que podamos.

Ver derivada en un punto. Ver función derivada



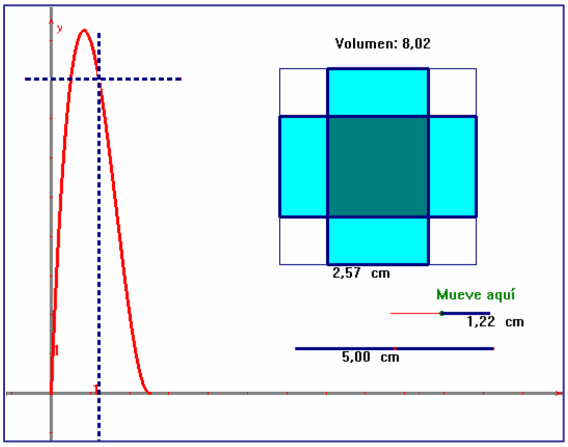
También podemos tener una aproximación al concepto de integral definida. Si bien no se calcula el área, al menos podremos determinar la región encerrada entre una curva y el eje de abscisas entre dos límites. Esto se consigue con un segmento **S** que tiene un extremo **A** sobre la curva y el otro **B** sobre otro segmento **T** dibujado previamente (con extremos en los límites de integración). El lugar geométrico de los segmentos S respecto al punto A dibujará cincuenta segmentos con las condiciones prefijadas que darán la imagen del sombreado de la región deseada. Ver Área bajo una curva.



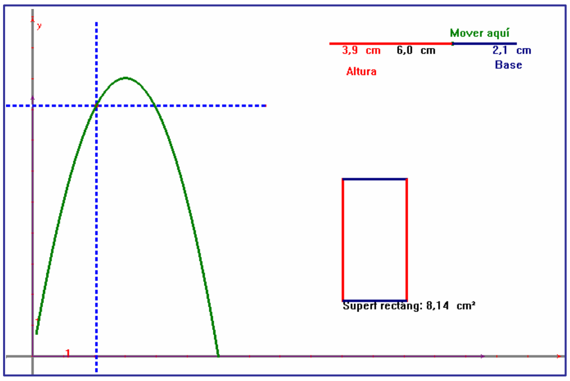
De forma parecida podemos sombrear la región determinada entre dos curvas tomando como punto de partida los segmentos que son paralelos al eje de ordenadas y tienen los extremos sobre las dos curvas. Ver área entre dos curvas.

4. Algunos problemas clásicos de optimización.

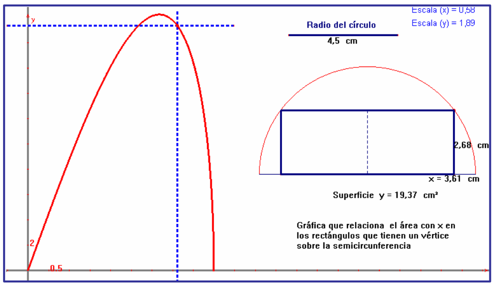
Cabri permite aportar nuevas perspectivas a problemas que tradicionalmente pertenecen a la órbita del cálculo de derivadas en situaciones de optimización. Los diseños de ordenador pueden ser utilizados por el profesor de Secundaria para sugerir ideas a los estudiantes



- Es el caso del problema de las láminas de cartón a las que recortamos cuadrados en los vértices y después doblamos para construir cajas sin tapa. En la figura de la derecha podemos imprimir animación a un punto sobre el segmento pequeño que determina el tamaño del cuadrado que se recorta, se construye la forma recortada de la lámina de cartón (el desarrollo plano de la caja) y se transfieren a un sistema de ejes de coordenadas el valor del lado del cuadrado y el volumen de la caja resultante. Ver Cajas de cartón.



- Una situación parecida se puede diseñar con el estudio del área de los rectángulos de perímetro constante. Partimos del segmento de la parte superior derecha que determina la base (en azul) y la altura (en rojo).



- Estudio del área de los jardines de forma rectangular en el interior de una semicircunferencia que tienen dos vértices sobre el diámetro y los otros dos sobre la curva.

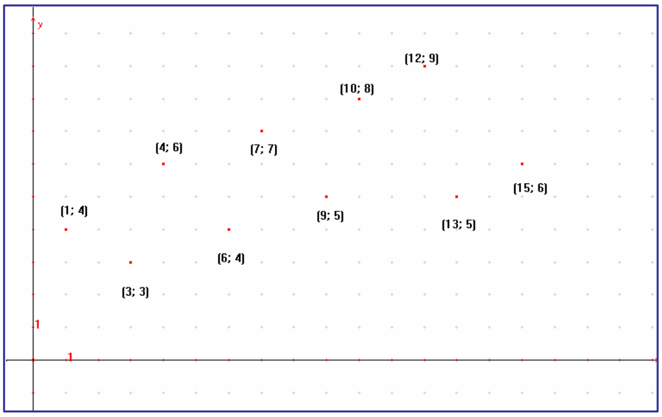
5. Cabri Géomètre II para el tratamiento de la estadística.

En los nuevos curricula de matemáticas en secundaria se hace especial hincapié en la enseñanza de la Estadística, esto es actualmente posible gracias a la tecnología que incorporan las calculadoras y los diferentes programas implementados en los ordenadores. Un ejemplo de la importancia del uso de la tecnología en la enseñanza de estos tópicos es la regresión, el uso de muchos datos lo más reales posible hace que muchas veces parte del alumnado se quede en el algoritmo de construcción y no acabe de ver que es lo que hay detrás. Vamos a presentar un par de ejemplos de construcción geométrica de las rectas de mínimos cuadrados y mediana-mediana que hacen que se visualice el proceso de construcción y ayude al alumnado en la construcción de los conceptos para mejorar su comprensión.

Construcción de la recta de mínimos cuadrados:

a) Colocación de los puntos.

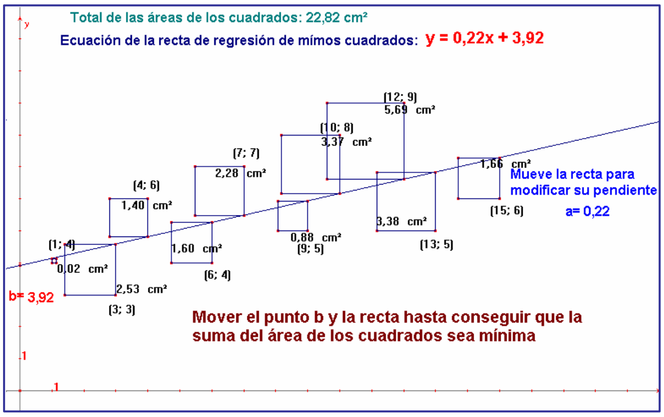
- Crea una *Nueva figura* y unos nuevos ejes y muestra la parrilla.
- Mueve el origen de coordenadas de forma que la pantalla muestre el primer cuadrante.
- Utiliza *Puntos*, para colocar sobre la parrilla de 6 a 10 puntos al azar. (Guarda la figura en un fichero aparte, así la podremos utilizar después). Ver [Datos de regresión.]



b) Recta y cuadrados.

- Dibuja una recta que pase por un punto del eje y, utiliza *Ecuación y coordenadas* para visualizar la ecuación de la recta.
- Usa *Recta perpendicular* para trazar rectas perpendiculares al eje x y que pasen por cada uno de los puntos.

- Con *Punto de intersección* entre dos objetos, marca los puntos de intersección de las perpendiculares con la recta que has dibujado antes.
- Oculta las rectas perpendiculares y dibuja los *Segmentos* que unen los puntos que representan los datos con las intersecciones en la recta (residuos).
- Crea una *Macro* que construya un cuadrado de lado los segmentos y mida su área.
- Construye todos los cuadrados asociados a los segmentos.
- Con la *Calculadora* obtenemos la suma todas las áreas.
- Mueve el punto de corte de la recta con el eje y modifica la pendiente de la recta hasta que la suma de las áreas sea mínima. Ver Recta de mínimos cuadrados 1

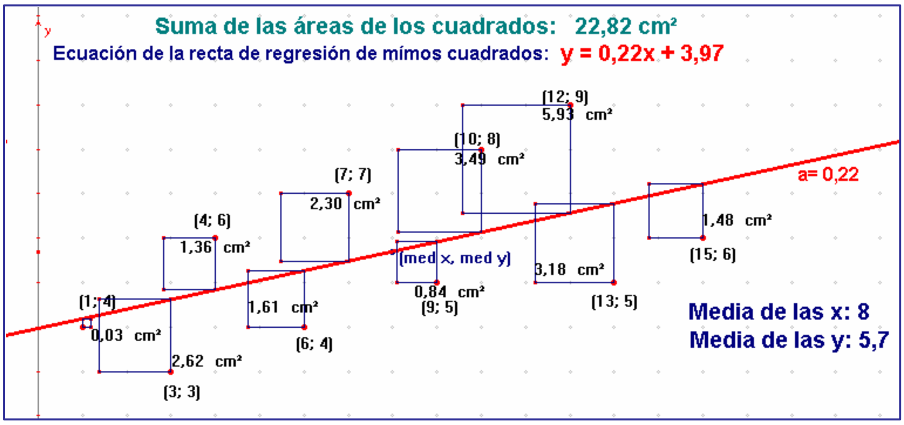


- La recta resultante es la recta de mínimos cuadrados.

c) La recta pasa por el punto (media x, media y)

- Como la ecuación de la recta de regresión de mínimos cuadrados es: $y = \bar{y} + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x - \bar{x})$, podemos deducir que ésta pasa por el punto (media de las x, media de las y), por lo que vamos a trasladar el punto de paso de la recta de (0, b) al (media de las x, media de las y).
- Con la *Calcular* obtén la media de las abcisas (x) y de las ordenadas (y).
- Con *Transferencia de medidas*, sobre el eje correspondiente, marca el punto de la media de las x y de la media de las y.
- Traza la perpendiculares correspondientes y señala el *punto de intersección* (media de las x, media de las y).
- Con *Redefinir objeto* mueve el punto de corte con el eje y (b) hasta el punto (media de las x, media de las y).

- Ahora sólo queda modificar la pendiente de la recta para conseguir la recta de mínimos cuadrados. Ver Recta de mínimos cuadrados 2.



La recta mediana-mediana.

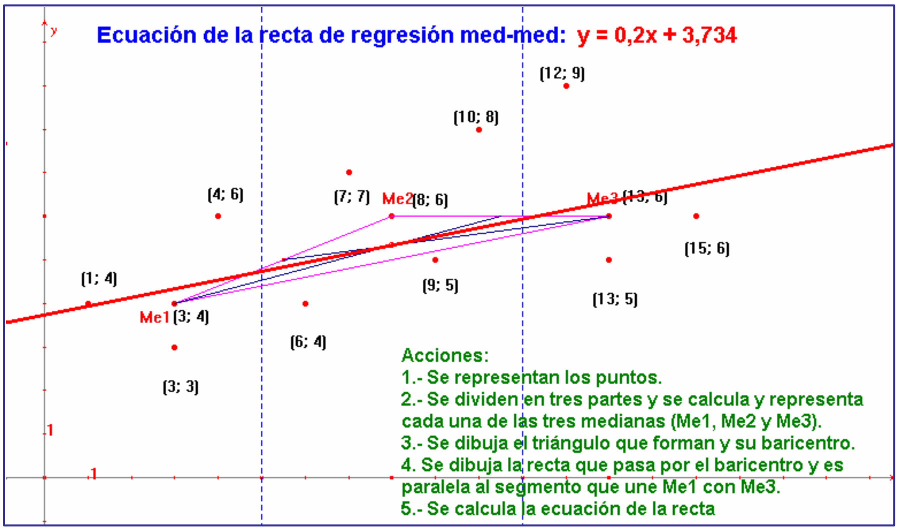
La Geometría y el Álgebra se unen en una técnica de análisis de datos que se llama recta mediana-mediana.

Esta recta de regresión utiliza el concepto de mediana en lugar del de media de los datos que se usa en la recta de mínimos cuadrados. A la recta mediana-mediana también se la conoce como recta resistente, porque no se ve afectada por datos "extraños" (muy alejados de la media) como lo estaría la recta de mínimos cuadrados. Esta diferencia es el resultado de utilizar la mediana en lugar de la media. El objetivo de la recta mediana-mediana, como el de otros modelos de ajuste, es el de representar la tendencia de los datos mediante una recta. Una vez calculada la ecuación de esta recta, podemos dibujarla, justificar la relación y hacer predicciones sobre las variables.

Construcción de la recta mediana-mediana

- Recupera la figura de datos de la actividad anterior.
- Haz tres grupos homogéneos y sepáralos mediante rectas perpendiculares al eje X, si hay un múltiplo de 3 +1 datos, deja el grupo del medio cun un dato más, si hay un múltiplo de 3 + 2 datos , deja el grupo del medio con un dato menos.
- Calcula y representa, mediante la intersección de perpendiculares a los ejes, las medianas de los tres grupos.

- Dibuja un triángulo de vértices las tres medianas y halla su baricentro (intersección de las medianas).
- Dibuja la recta que pasa por el baricentro y es paralela al segmento que une la mediana del primer grupo con la del tercero.
- Mediante la opción ecuación y coordenadas, muestra la ecuación de la recta. Ver Recta mediana-mediana.



La recta resultante es la recta mediana-mediana o resistente.

6. Conclusiones

La regresión lineal necesita de un cálculo arduo y un misterioso proceso usado para analizar, manipular, los datos. Como en muchos procesos matemáticos los conceptos subyacentes en la regresión lineal no son difíciles de entender –recta que cumple una serie de propiedades, minimice la suma de los cuadrados de los residuos, ..– . Con Cabri Géomètre II se puede ayudar al alumnado a visualizar qué se esconde detrás de la recta de mínimos cuadrados o mediana-mediana.

Colocando simplemente puntos y líneas en la pantalla se puede trabajar el concepto de suma de los cuadrados mínima de los residuos de forma numérica y visual en lugar de sólo desde el punto de vista algebraico. El alumnado puede realmente "ver" que de todas las rectas que se pueden dibujar para representar los datos sólo una es la de menor suma de los cuadrados de los residuos, así como que tiene sentido representar cada subgrupo de los datos por su mediana y que la recta que los represente debe pasar por el “centro de gravedad” del triángulo que forman.

La Geometría Dinámica de Cabri Geomètre II aporta formas de abordar los contenidos –conceptos y técnicas- matemáticos y los hacen mucho más fáciles de comprender por los estudiantes. Cabri establece puntos de conexión entre las ideas algebraicas y gráficas por medio de la geometría.

El estudiante puede estudiar cualitativamente familias de funciones: analizar su comportamiento, estudiar qué pasaría si modificamos alguno de los parámetros en la expresión algebraica. Esto le permite realizar conjeturas sobre las ideas generales sobre las funciones. Por otra parte, Cabri permite ampliar el conjunto de las funciones que podemos presentar, es el caso de la función logística de gran utilidad para analizar la evolución de ciertas poblaciones de seres vivos, pero muy difícil de tratar si no tenemos el soporte gráfico de la tecnología.