
Las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas

José Antonio Mora Sánchez. Profesor de Secundaria.

Alicante. Abril de 1998

La calculadora ha influido en gran medida en las matemáticas escolares de las dos últimas décadas. Puede que no hayan llegado a satisfacer las expectativas de quienes presagiaban una gran revolución, aunque los cambios producidos en los contenidos matemáticos son mucho más profundos de lo que algunos estarían dispuestos a admitir. Esta parece ser la tónica en un futuro próximo, un problema de velocidades: los cambios que se avecinan no serán tan rápidos como sus defensores desearían, aunque serán tan profundos que removerán los cimientos de las matemáticas escolares, nada quedará como estaba por mucho que sus detractores se empeñen en negarlos.

1. La influencia de las calculadoras en los contenidos matemáticos.

Vamos a analizar en detalle la forma en la que las calculadoras influyen en el tratamiento de los contenidos matemáticos.

Destrezas

Buena parte del trabajo que se realiza en las clases de matemáticas tiene como fin último - y a veces casi único -, el dominio de los algoritmos de cálculo numérico y/o algebraico: desde el aprendizaje de la suma a la simplificación de radicales pasando por las operaciones con números negativos, los paréntesis y las operaciones con fracciones, la resolución de ecuaciones, sistemas etc.

Es éste un estado de cosas en el que el cálculo mental y la estimación numérica quedan relegados a un segundo plano, se practican poco porque no se pueden alcanzar las cotas de precisión de los algoritmos de papel y lápiz, hay que pensar que estos procedimientos son consecuencia de varios siglos de esquematización progresiva y que, si han llegado hasta nuestros días mientras otros muchos se perdieron por el camino, es por haber dado prueba de su consistencia y su simplificación. El problema para el aprendizaje es que es esa misma simplificación la que ha producido un efecto negativo al hacer que los conceptos queden mucho más ocultos.

Algo parecido ocurre con los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones. El tratamiento que se les da en las clases de secundaria, suele estar basado en los métodos de resolución de cada uno de los tipos de ecuaciones, seguido de los casos particulares y los ejercicios de práctica de esas destrezas. De esta forma corren igual suerte ecuaciones lineales, cuadráticas, polinómicas, trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etc.

Las calculadoras *suelen favorecer los métodos no estandarizados* que suelen ser más informales, variables y flexibles, dependen del tipo y tamaño de los números considerados, de las habilidades del resolutor y de su estilo al abordar los cálculos. La aportación de estos métodos a la comprensión de las matemáticas es mucho mayor que la de los algoritmos clásicos, porque ponen de manifiesto de manera más clara las relaciones entre los conceptos que una persona es capaz de establecer por sí misma.

Las calculadoras *apoyan también los algoritmos escritos* cuando estudiamos la justificación de los pasos del proceso. En algunos casos podemos conectar el procedimiento que sirve para realizar una determinada tarea con su equivalente con la calculadora, por ejemplo, cuando proponemos el cálculo del cociente y el resto de una división dada utilizando únicamente la calculadora.

La calculadora realiza las operaciones sin dificultad, pero *no nos informa acerca de qué operaciones* son las que hay que realizar ante una situación determinada. Esto nos conduce a un cambio en el centro de atención de la práctica escolar.

El *tiempo* que se ahorra en el aprendizaje y consolidación de las destrezas, *se puede invertir* en otras actividades más relevantes. Por ejemplo:

- Avanzar el aprendizaje de otras partes de las matemáticas actualmente desfavorecidas como la Geometría o la Probabilidad, que además proporcionarán nuevos contextos para el desarrollo de conceptos y destrezas numéricas.
- En la realización de nuevos problemas o la reflexión sobre el método de resolución, en lugar de hacerlo sobre los cálculos.
- En el estudio de los conceptos implicados y en las relaciones entre ellos.

Conceptos.

La calculadora *adelanta la introducción* de algunos conceptos: desde el mismo momento en que realizamos una división, pueden aparecer los decimales. También es el caso de noción de límite, para la que la calculadora aporta un acercamiento intuitivo que le servirá para construir las redes que sustentan el concepto, esto le será de gran ayuda cuando el estudiante tenga que profundizar en el concepto de límite desde una óptica más formal.

En otros casos, la calculadora *permite analizar más modelos* para introducir conceptos como ocurre en la notación científica y en la facilidad para introducir distintos tipos de funciones o para estudiar situaciones prácticas en las que se presentan esas funciones.

La calculadora *favorece la creación de situaciones de aprendizaje* que redundan en una mejor comprensión de los conceptos matemáticos. Por ejemplo, la obtención con la calculadora del resultado de multiplicar 73×12 sin utilizar la tecla de multiplicar, pone de manifiesto que la multiplicación puede ser vista como una suma repetida (doce veces 73 o setenta y tres veces 12), pero los estudiantes pueden aplicar técnicas que permiten el agrupamiento de resultados parciales: $730+73+73$ (¿propiedad distributiva?), y realizar modificaciones en esa estrategia para multiplicar 73×98 ó 73×85 . Pero el trabajo puede ir más lejos, ya que si se considera la operación de multiplicar como inversa de la de dividir, en este caso, el objetivo se habría centrado en la búsqueda de un número que dividido por 12 se obtenga cociente 73 (o que dividido por 73 dé 12). Visto de este modo, el problema se transforma en una situación totalmente distinta resoluble por ensayo y error en la que cada nuevo intento nos da una respuesta que tenemos que procesar para la siguiente prueba.

La utilización de la calculadora *puede actuar de catalizador* en determinados conceptos o procesos cuando se utiliza para que los estudiantes indaguen sobre los conocimientos que ya tienen y vean la necesidad de otros nuevos que resuelvan las situaciones planteadas.

Resolución de problemas.

La calculadora es una herramienta que tiene grandes aplicaciones en la forma en que se analizan, abordan, plantean y resuelven los problemas matemáticos.

La calculadora *permite plantear problemas más "reales"*, con enunciados que tienen más conexiones con la realidad. Ya no hace falta que todos los trenes vayan a 60 Km/h durante 40 minutos, ahora está permitida la circulación a 112,35 Km/h durante 37 minutos. Los problemas estadísticos pueden tomar los valores del trabajo de campo y obtener conclusiones del estudio.

Si los cálculos se pueden realizar con la calculadora, la atención del resolutor/a puede centrarse en *los conceptos implicados* y en el método de resolución del problema en lugar de estar pendientes de la corrección de cada operación.

Facilita la realización de *investigaciones* en la clase de matemáticas, en primer lugar porque favorecen el trabajo exploratorio previo de la situación que aporta una colección de resultados que, aunque parciales, permitirán enfocar mejor la investigación al ayudar a identificar los problemas que merece la pena ser planteados. Una vez se han identificado y enunciado esos problemas, las calculadoras facilitan la búsqueda de patrones y regularidades en la situación planteada, lo que provocará que los estudiantes emitan conjeturas que después habrán de probar.

La calculadora *unifica ciertos procedimientos* que hasta ahora permanecían dispersos en las matemáticas escolares, es el caso de la resolución de

ecuaciones: lineales, cuadráticas, Ruffini para algunas polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. Cada una con su secuencia particular de instrucciones. El método de aproximaciones sucesivas con la calculadora científica es aplicable a cualquier tipo de ecuaciones, aunque ciertamente es engorroso y rutinario. El tratamiento gráfico de las ecuaciones proporciona un apoyo visual a la idea de valor de verdad, como punto de corte de una función con el eje de abscisas - o como punto común a dos curvas -, pero en la mayoría de los casos es impracticable, como el caso anterior, si estamos obligados a dibujar las gráficas punto a punto. Cuando la calculadora gráfica automatiza este proceso, nos está ayudando realmente a comprender la resolución de ecuaciones.

La calculadora también *puede ser una fuente de problemas matemáticos*. Como cualquier recurso didáctico, no se conforma con facilitar el trabajo, sino que se transforma ella misma en una fuente de problemas matemáticos, su propia lógica de funcionamiento e incluso sus mismas limitaciones provocan cuestiones que ponen en danza los conocimientos matemáticos que posee el estudiante.

Actitudes.

Una clase en la que las calculadoras son algo habitual, puede favorecer *actitudes positivas hacia las matemáticas*. Si se reduce la dependencia de la memoria para recordar y procesar algoritmos, permite que aquellos estudiantes que tienen dificultades para comprenderlos y/o recordarlos, puedan seguir en el nivel de la clase.

En este sentido, el efecto que produce la calculadora es el de una *democratización* del cálculo y de las mismas matemáticas. Hacen que haya más matemáticas a disposición de más gente y eso es un gran avance sobre todo en los niveles educativos de la enseñanza obligatoria, sobre todo si conseguimos que más personas puedan acercarse a las matemáticas para obtener provecho de ellas y, por qué no, placer.

Las nuevas exigencias sociales, hacen necesario que los enseñantes nos situemos desde la óptica de que el aprendizaje no acaba en el periodo escolar. Cada vez se hace más patente que las personas habrán de ampliar sus conocimientos matemáticos a lo largo de su vida como profesionales y como ciudadanos/as (trabajar con nuevas máquinas y ordenadores, elaborar informes y presupuestos, etc.), por esto el objetivo de la enseñanza obligatoria ha de abrirse al planteamiento de que las personas adquieran mayor confianza en las matemáticas que conocen, ya sean pocas o muchas, como señala el informe Cockcroft. Las calculadoras consiguen que realizar una operación, calcular un porcentaje, o resolver una ecuación sea una tarea abordable para cualquier persona que tenga los conceptos claros, aunque haya olvidado el procedimiento escolar. Es una falacia hablar en estos momentos de la dependencia de las máquinas cuando lo que ocurre realmente es que las calculadoras nos hacen más independientes.

Un rasgo más a incluir en el terreno de las actitudes es la *sensatez* a la hora de utilizarlas:

- Saber que en ciertos momentos, la calculadora se convierte en un estorbo (dividir o multiplicar con calculadora por 10 ó 100 sólo nos llevará a errores).
- Dar resultados con gran precisión dificulta el análisis del resultado cuando basta con una aproximación (algo más de ...).
- Utilizar la tecla % de la calculadora puede oscurecer el concepto de porcentaje y que se quede sin el significado matemático que se le da cuando se relaciona con las operaciones matemáticas.
- En algunos casos, como cuando se va a introducir el concepto de raíz, suele resultar interesante la actividad consistente en "prohibir" la utilización de esa tecla y dedicar el trabajo a encontrar un número cuyo cuadrado sea el original. Esto provocará mejoras en la comprensión del concepto ya que relaciona raíz con potencia y tiene la ventaja adicional de conectar con el método de aproximaciones sucesivas y con ideas como el grado de aproximación a la solución buscada.

2. Algunas consecuencias de la introducción de las calculadoras en las clases de matemáticas.

2.1. Las calculadoras favorecen las relaciones entre *matemáticas y realidad*:

- Podemos trabajar con los datos que obtenemos de la experiencia, no necesitan ser modificados para facilitar su tratamiento.
- Se facilita el estudio de nuevas aplicaciones, en especial aquellas que necesitan el tratamiento de la información para realizar después un análisis gráfico, funcional o estadístico.
- Posibilitan la adquisición de más experiencias prácticas que crearán modelos mentales para la introducción de un determinado concepto o para establecer conexiones con otros conocimientos matemáticos.

Todo esto tiene importantes aplicaciones sobre la forma en que los estudiantes ven las matemáticas, de esta forma son percibidas como una poderosa herramienta que sirve para resolver problemas.

2.2. Con la utilización de calculadoras se propicia que el estudio de las matemáticas se centre más en las *estructuras conceptuales*, las redes interconectadas de conocimientos matemáticos. Estas relaciones se pueden favorecer con:

- El tratamiento de distintos tipos de cálculo: mental, escrito, aproximado y con calculadora.
- La utilización de diferentes procedimientos para una misma tarea, como ocurre en los métodos algebraicos, iterativos y gráficos para la resolución de ecuaciones, que en principio pueden ser diferentes, pero tienen bases comunes y complementarias.

- La conexión de las diversas partes de las de forma que cualquier trabajo que se haga en una de ellas tenga aplicaciones en las demás.

2.3. Favorece el *planteamiento investigador* de ciertas actividades matemáticas. Es este un tipo de trabajo que siempre se ha visto obstaculizado por la falta de tiempo en nuestras clases, con la calculadora podemos disponer de parte del tiempo que hasta ahora se dedicaba a la consolidación de destrezas y a la realización de operaciones. Las calculadoras actuales permiten automatizar el trazado de la gráfica de una función o la realización de operaciones con matrices para obtener resultados con rapidez y continuar con nuestra tarea.

La realización de trabajos de investigación entronca con el desarrollo de cualidades personales muy necesarias para el desarrollo del pensamiento matemático como la perseverancia, el ser sistemático, la creatividad y la independencia de criterio.

Otra de las características de las investigaciones es que rara vez se circunscriben a unos pocos conceptos ya que generalmente involucran muchos otros y de diversas áreas.

2.4. La introducción de cualquier *nuevo recurso* provoca interferencias iniciales en las clases de matemáticas, esto hace que se modifique en mayor o menor medida la práctica del aula. Con las calculadoras se da un desplazamiento de la atención de las matemáticas escolares: por una parte, ciertos temas matemáticos pierden parte de la importancia que se les daba, y por otra ciertas prácticas escolares dejan de rendir el beneficio pretendido:

- Adquieren mayor relevancia los conceptos y la forma en que se sustentan en el aprendizaje a partir de modelos sacados de la realidad y de aprendizajes anteriores.
- Se desplaza también del estudio de las operaciones a la propia selección de las operaciones para resolver un problema determinado.
- En la resolución de un problema matemático, deja de preocuparnos la realización de los cálculos para centrarnos en los métodos de resolución, en la búsqueda de estrategias, en el análisis de los resultados, etc.

2.5. Se favorece la creación y utilización de estrategias personales. H. Freudenthal considera que el aprendizaje de las matemáticas es un continuo avance en el proceso de esquematización del estudiante, y este proceso se ve mejorado cuando es el mismo estudiante el que ha de encontrar su propio procedimiento que lleve a la solución.

En el campo de las destrezas de cálculo, cuando una persona consigue crear un algoritmo propio para realizar una operación, estará más preparada para comprender el algoritmo tradicional. En lugar de memorizar una regla, la podrá comparar con su propio procedimiento para encontrar semejanzas y diferencias. Estará más preparado para apreciar la belleza y elegancia del algoritmo tradicional, proceso que ha sido depurado a lo largo de siglos de práctica. D. Fielker señala que "la creación de un algoritmo propio para resolver un problema, hace que se pongan en funcionamiento los conocimientos que se po-

seen. Pero ellos llegan más lejos, porque desarrollan un nuevo conocimiento, destrezas e ideas en el transcurso del trabajo".

Los procedimientos de los estudiantes tienen una mayor aportación de la intuición y de los esquemas de pensamiento del individuo, pero muy a menudo se basan en estrategias repetitivas que pueden ser utilizadas únicamente con la ayuda de la calculadora. Además, en algunos casos, podemos aprovechar la monotonía de estos métodos para incitar a los estudiantes a dar el paso en la búsqueda de métodos más generales como los algebraicos.

3. Cuestiones abiertas.

Las calculadoras automatizan ciertos procesos, mientras otros siguen dependiendo de las personas. Tenemos un ejemplo en la representación gráfica de funciones, ahora ya no necesitamos dibujar manualmente curva, ya lo hace la calculadora gráfica, pero aún nos quedan muchas tareas por hacer y decisiones que tomar:

- Traducir la ecuación al lenguaje de la calculadora,
- Movernos por las herramientas disponibles en la calculadora para elegir las más adecuadas.
- Saber desde dónde veremos mejor la función o las funciones implicadas (situar un punto de observación).
- Elegir la escala adecuada para verlo mejor.

La introducción de las calculadoras introducirá algunos conflictos que habrán de ser resueltos tanto en los diseños de los programas como en la práctica habitual de las clases y que deben tener su reflejo en las pruebas de evaluación externa que se diseñen.

- La calculadora posibilita que el no saber la tabla de multiplicar no sea un obstáculo para el futuro avance de un estudiante en matemáticas. ¿Es eso realmente un avance?. ¿No es posible que el profesor abandone antes de tiempo la enseñanza de las destrezas de cálculo ante la dificultad de transmitir las a ciertos estudiantes?.
- Las reglas de manipulación algebraica no están en la enseñanza de las matemáticas para martirizar a los estudiantes ni por capricho de los diseñadores de los programas, sino por la utilidad de las expresiones para representar situaciones y analizarlas desde la óptica científica. Si no prestamos suficiente atención al aprendizaje del álgebra, seguramente aparecerán dificultades en temas posteriores.
- Algunas decisiones ya han sido tomadas por la fuerza de los hechos: ya no se calculan logaritmos ni funciones trigonométricas con tablas, las teclas de la calculadora cumplen ese trabajo con mayor rapidez y precisión. Esto tiene la contrapartida de la pérdida de destreza en el uso de tablas y en técnicas como la interpolación que resultaban útiles como introducción a otros temas matemáticos. Cada vez es menos necesario conocer la fórmula del

seno del ángulo doble para los cálculos aunque puede que la necesitemos más adelante para la simplificación algebraica en el cálculo de derivadas.

- Las calculadoras gráficas todavía no se han generalizado entre los estudiantes como lo han hecho la calculadora elemental o la científica. Podemos encontrarnos con tal diversidad de calculadoras en una clase, que la atención al funcionamiento particular de cada una de las calculadoras distraigan la atención del profesor.
- En caso de adoptar la opción de tratar ciertos temas con la ayuda de las calculadoras gráficas, sería deseable un cierto consenso, entre los enseñantes que establezca una serie de normas comunes. Sería algo parecido a lo que ocurre actualmente con el algoritmo de cálculo de las raíces cuadradas que está siendo desterrado de la escuela como ya ocurriera hace años con la raíz cúbica.
- El consenso solicitado en el punto anterior puede venir de la mano de la autorización de las calculadoras gráficas en las pruebas de evaluación externa como la selectividad, algo que ya se produce en países de nuestro entorno y en algunas comunidades autónomas. Esto hará que aumente su incidencia para provocar cambios en el currículum de las matemáticas del bachillerato.
- Con la generalización de las calculadoras se hacen necesarios estudios que profundicen en cuáles son las destrezas matemáticas necesarias para sacar partido de ellas. Los estudiantes deberán dedicar su esfuerzo a todo aquello que las calculadoras no son capaces de hacer, en especial a:
 - La búsqueda de relaciones entre los conceptos matemáticos implicados.
 - La toma de decisiones acerca de las acciones a realizar
 - La interpretación de los resultados y la obtención de conclusiones.

Todas estas incertidumbres tienen una parte negativa de intranquilidad del profesorado, pero también tienen consecuencias beneficiosas: el uso de las calculadoras tiene un efecto dinamizador sobre la enseñanza de las matemáticas, al ejercer de elemento desestabilizador sobre el currículum, propiciando que los enseñantes estén en continua revisión y actualización de lo que enseñan y de la forma en que lo hacen.

Bibliografía

Alonso, F. Y otros (1987). Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los noventa. Simposio de Valencia. (Mestral: Valencia).

Aula de Innovación educativa (1995). Número monográfico dedicado a La Calculadora en la clase de Matemáticas. (Graó: Barcelona)

A.T.M. (1985) Calculators. Readings in Mathematical Education. Sel. By D. Fielker. (A.T.M.: London)

A.T.M. (1985) Calculators in the primary School. . Readings in Mathematics in School and Mathematics Teaching (A.T.M.: London)

Cero, Grupo (1984). De 12 a 16, un proyecto de curriculum de matemáticas. (Generalitat Valenciana)

Cockroft, informe (1984). Las matemáticas sí cuentan. (M.E.C.: Madrid).

Fernández, S y Colera J. (1994). Calculadoras I. (Proyecto Sur. 2 puntos: Granada)

Fielker, D. (1986). Usando las calculadoras con niños de 10 años. (Generalitat Valenciana).

I.C.M.I. (1986). Las matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los noventa. Simposio de Kuwait. (Mestral: Valencia).

Mora, J.A. (1995). Calculadoras II. (Proyecto Sur. 2 puntos: Granada)

N.C.T.M. (1991). Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. (S.A.E.M. Thales: Sevilla)

N.C.T.M. (1992). Calculators in Mathematics Education. 1992 Yearbook. (N.C.T.M.: Reston).

Swan, M. Competencia numérica y desarrollo de estructuras conceptuales. (Shell Centre. U. Nottingham)

Udina, F. (1989). Aritmética y calculadoras. (Síntesis: Madrid).