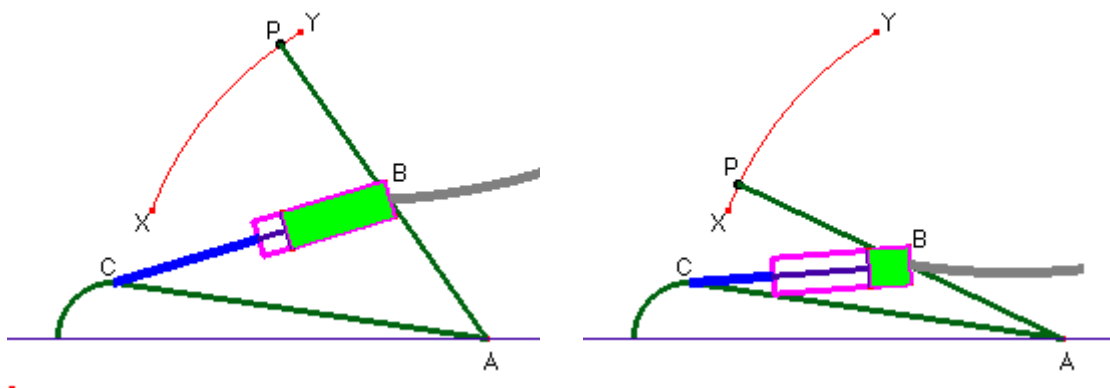

TALLER: LA GEOMETRÍA DE LOS MECANISMOS

José Antonio Mora Sánchez. Profesor de E. Secundaria

1. Presentación.

El objetivo de este taller es que los profesores asistentes manipulen e investiguen una colección de diseños de mecanismos, muy utilizados en tecnología, que han sido realizados con el programa informático Cabri II. Se ha elegido el triángulo como figura geométrica presente en muchas construcciones, como forma de transformar un movimiento en otro distinto. Se estudiarán tres formas de construir un triángulo que tenga dos lados de longitud fija y el otro de longitud variable, y después se muestran algunos ejemplos de la utilización que se hace de esta construcción en tecnología.

Con los diseños realizados se ha simulado el funcionamiento de objetos que pertenecen a la esfera de las matemáticas de la vida cotidiana: el gato elevador, el funcionamiento del motor de la máquina de vapor y el cilindro hidráulico han servido de base para estudiar tres formas de construir el triángulo con un lado variable y aplicarlo a nuevas situaciones, como la puerta levadiza de los garajes, la aguja en la máquina de coser, la limadora o la máquinas de construcción que utilizan brazos articulados.



La gran mayoría de los diseños tienen como punto de partida los estudios de las mecanismos de Brian Bolt (1970 y 1992), especialmente en su último libro: Matemáquinas.

2. Las matemáticas

Las ideas matemáticas involucradas en este trabajo son muy variadas. En algunos casos, este trabajo puede servir para consolidar conceptos y destrezas que los estudiantes han aprendido anteriormente. El programa Cabri II

proporciona una nueva visión de las situaciones que puede completar las experiencias que los estudiantes han adquirido por otras vías.

- Comprensión y utilización de los elementos geométricos básicos, sus propiedades y relaciones
- Medida y cálculo de ángulos, longitudes y superficies.
- Proporcionalidad de magnitudes.
- Todo tipo de movimientos en el plano.

Dependiendo del nivel en el que se encuentren los estudiantes, el trabajo con mecanismos puede ser utilizado por el profesor para introducir conceptos matemáticos como son:

- Las ideas sobre el lugar geométrico son muy intuitivas en Cabri II.
- El estudio de las trayectorias de ciertos puntos en un mecanismo articulado da pie a su tratamiento con geometría de coordenadas
- El estudio de las relaciones trigonométricas por la facilidad de elaborar tablas y gráficas a partir de los diseños construidos.

Este análisis de objetos se centra en la comprensión global del funcionamiento de cada mecanismo: las relaciones entre las piezas y la interacción entre ellas. Un paso posterior, que queda para próximas profundizaciones, vendrá del estudio más preciso de cada movimiento: qué cambios producimos en el sistema complejo al realizar alteraciones en las condiciones iniciales, por ejemplo si alargamos el recorrido de uno de los elementos 1 cm o reducimos el ángulo de giro 5 grados.

El programa Cabri II hace interesantes aportaciones al estudio de la geometría, una de ellas es la posibilidad de imprimir movimiento en el tratamiento de los objetos geométricos, lo que convierte a este programa en un recurso más que añadir a esa extensa lista de recursos manipulables, como las varillas articuladas, los espejos, las cartulinas, etc.

3. Los mecanismos.

Esta forma de abordar las matemáticas, a partir del estudio de los mecanismos, ayuda a los estudiantes en una más amplia comprensión de las matemáticas, ya que entra en el proceso mismo de matematización de situaciones reales a partir de la investigación de los objetos del entorno. En el proceso de construcción es necesario discriminar los elementos esenciales de los que sólo son accesorios. Después hay que traducir la situación real a la sintaxis del programa y a las mismas matemáticas y utilizar todas las herramientas al alcance de nuestra mano para resolver el problema planteado: medida, cálculo, utilización de propiedades y teoremas, etc.

Los mecanismos son un contexto para hacer matemáticas y para comprender, a través de las matemáticas, el funcionamiento de muchos de los objetos que nos rodean, las conexiones con otras áreas del currículo como la física y la tecnología son evidentes.

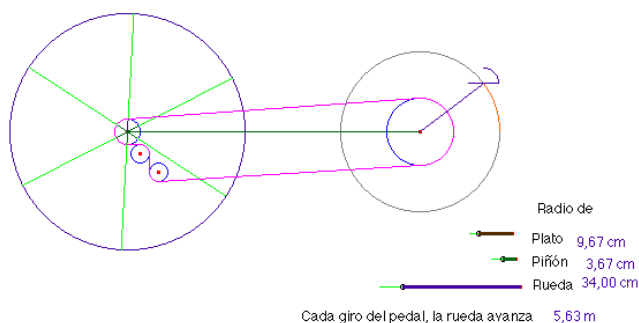
La comprensión de un mecanismo no suele ser una tarea fácil, normalmente se encuentran ocultos entre otros objetos y no se llegan a ver bien hasta que se intenta su construcción. Aquí es donde el programa Cabri II es de gran ayuda ya que proporciona una herramienta que, en cierto modo, es más asequible para muchos que el montaje real.

4. El programa Cabri II

Una de las características de los mecanismos es que en la mayoría existe una pieza con la que iniciamos el movimiento y otra encargada de ejecutar el trabajo marcado. Entre ellas tenemos un conjunto de piezas que se encargan de la transmisión de los movimientos desde el impulsor hasta el seguidor. Este esquema de trabajo se adapta a la perfección a la filosofía de Cabri II, con él es relativamente sencillo situar un punto sobre la pantalla de dibujo, que se mueva libremente o sujeto a ciertas condiciones: puede estar situado sobre un segmento, una circunferencia o cualquier otro elemento ya construido, y crear otros a partir de él, nuevas figuras a partir de estos puntos y así sucesivamente. Cuando desplazamos los objetos iniciales, todo el sistema se moverá con ellos.

Como ya se ha señalado, podemos imprimir movimiento a estos sistemas para ver el mecanismo en acción y así analizar las partes que lo componen, la región del plano por la que podrán desplazarse ciertos elementos o las distintas velocidades de las piezas que lo componen. Por otra parte, la mayoría de los diseños admiten la introducción de modificaciones en algunos de los parámetros y estudiar así su efecto en el resto de los elementos que dependen de ellos. El carácter interactivo de un programa de ordenador es difícil de reflejar en un texto escrito, por ello se ha añadido una colección de imágenes que ilustran las figuras realizadas que, por fuerza, han de ser estáticas.

Para facilitar el estudio de los sistemas, en algunos de los diseños se ha cuidado de dejar algunos parámetros para que puedan ser manipulados por el usuario, con el fin de que pueda captar mejor el funcionamiento del mecanismo. Por ejemplo, en el diseño de la transmisión de la bicicleta, podemos modificar el radio del plato, el del piñón y también el de la rueda. Una vez establecidas las dimensiones podemos observar el movimiento del sistema y obtener algunos cálculos como el desplazamiento de la bicicleta cada vez que damos una vuelta completa de pedal.



modificar el radio del plato, el del piñón y también el de la rueda. Una vez establecidas las dimensiones podemos observar el movimiento del sistema y obtener algunos cálculos como el desplazamiento de la bicicleta cada vez que damos una vuelta completa de pedal.

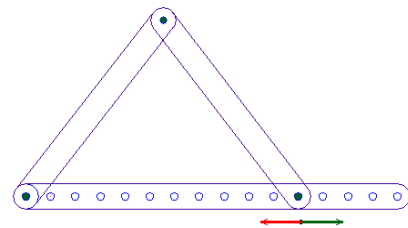
Por último, Cabri II incluye la posibilidad de realizar macroconstrucciones o procedimientos con los que podemos “enseñar” al programa a realizar ciertas construcciones, que una vez diseñadas, podemos utilizar en el momento en que las necesitemos.

5. Un ejemplo: el triángulo de base variable

Es uno de los diseños más sencillos y más utilizados para la construcción de mecanismos articulados. Consiste en un triángulo con dos varillas de longitud fija y otra de longitud variable, es decir, el tercer lado se puede estirar o encoger. Vamos a estudiar tres construcciones distintas de este tipo de triángulos que son utilizadas después para provocar diferentes efectos en la transmisión del movimiento en mecanismos.

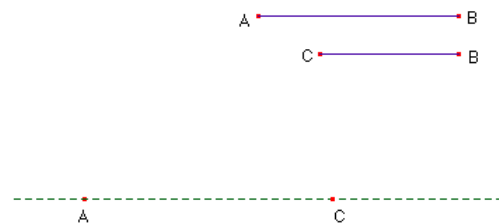
5.1. Primera construcción: el gato elevador.

Las construcciones geométricas admiten multitud de enfoques y grados de aproximación y/o profundización. Lo que queremos es construir un triángulo articulado con dos varillas de longitud fija y una tercera que se pueda alargar o acortar. Si hacemos la construcción con tiras de cartulina, nuestra preocupación será estudiar la forma de hacer las uniones o la forma de conseguir una varilla extensible.

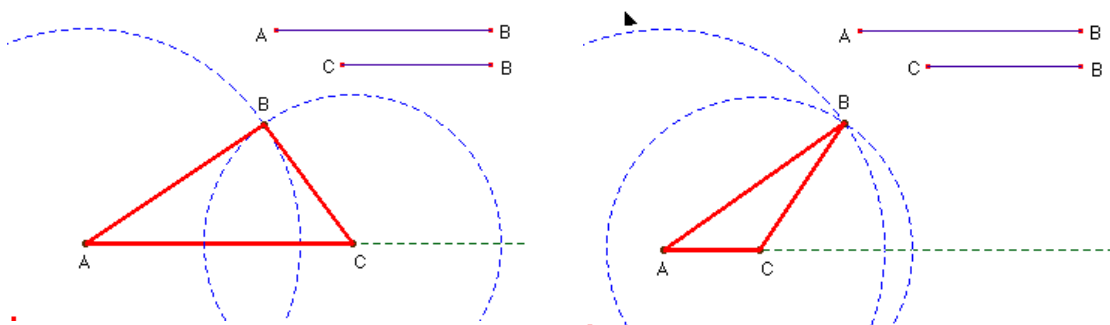


Cuando la herramienta es un programa de ordenador que utiliza puntos, segmentos, polígonos, etc., hay que ir hacia atrás para captar los elementos más básicos del sistema. El triángulo puede ser visto desde los vértices: uno de ellos puede ser fijo, otro desplazarse por un segmento y el tercero vendrá determinado por los dos segmentos de longitud marcada de antemano y que cada uno de ellos tiene un extremo sobre uno de los puntos dibujados.

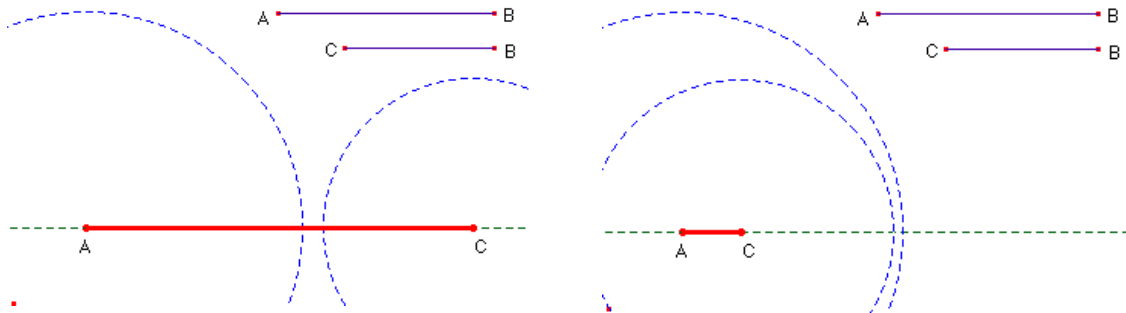
Para esta primera construcción es conveniente que dibujemos previamente las dos varillas de longitud fija AB y BC, un punto A que será fijo y otro C que se puede desplazar —en principio—, sobre una recta que pasa por A.



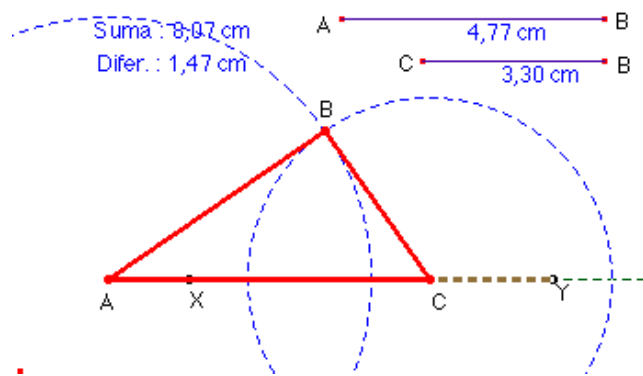
Para obtener la posición del tercer vértice, Cabri II dispone de la herramienta *Compás*: dado un segmento AB y un punto A, permite dibujar la circunferencia de centro en A y radio AB. El punto B vendrá determinado por cualquiera de los dos puntos de intersección de estas circunferencias. Podemos desplazar C a lo largo de la semirecta para obtener los posibles triángulos



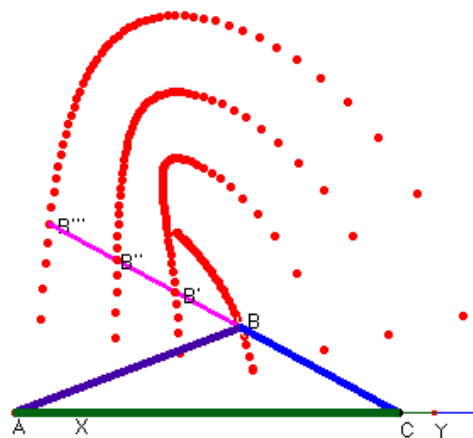
Ahora podemos investigar la construcción: modificar las longitudes de los segmentos o la posición de algunos de los puntos que le han servido de base. Aquí empiezan los problemas, porque nos encontraremos con situaciones en las que el triángulo no existe, ya que las circunferencias no tienen intersección.



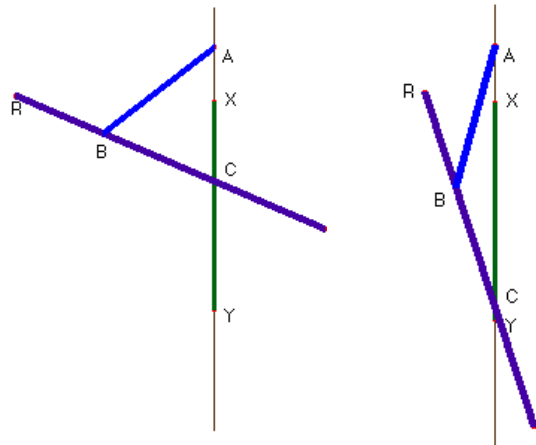
Nos replanteamos la situación para estudiar el conjunto de posiciones sobre las que se puede mover C para que el triángulo pueda ser construido, es decir, cuando AC está entre $AB-BC$ y $AB+BC$. Medimos los segmentos y calculamos la suma y la diferencia de esas longitudes para después transferir esas medidas a la semirecta a partir del punto A.. Esto nos da dos puntos: X e Y que serán los extremos del segmento sobre el que queremos que se desplace libremente C.



Tenemos aplicaciones de esta construcción en el gato elevador ya que los desplazamientos horizontales del punto C consiguen que B se sitúe a diferentes alturas. Es más, podemos alargar el segmento BC y situar sobre él distintos puntos de apoyo para estudiar las distintas posiciones en que se encuentran cuando C se desplaza sobre el segmento. En este caso se ha dejado la *traza activada* de los cuatro puntos marcados sobre el segmento para analizar las distintas trayectorias que seguirán estos puntos. Otra forma de hacerlo sería con la *herramienta Lugar Geométrico*.

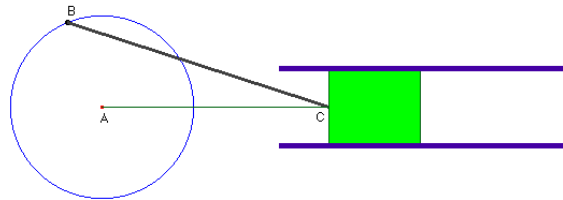


Tenemos otra aplicación en el mecanismo de apertura de la puerta de acceso a muchos garajes, ahora la base del triángulo se coloca en posición vertical. La posición de C en el segmento XY determinará la mayor o menor inclinación del segmento BC, que hará que la puerta se abra al quedar horizontal o se cierre al alejarse C de A y quedar la puerta vertical.

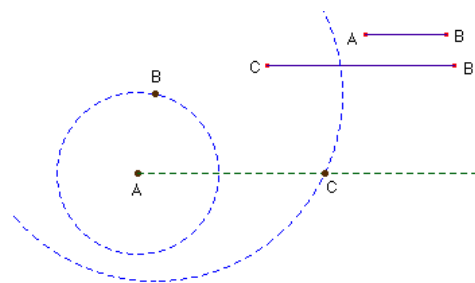


5.2. Segunda construcción: la máquina de vapor.

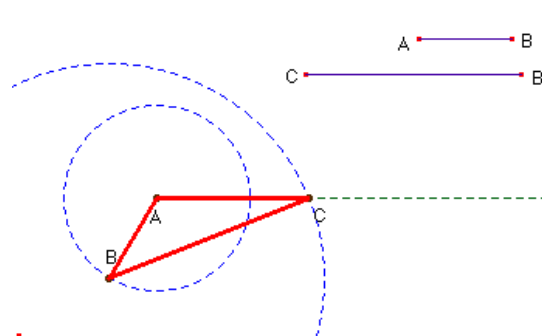
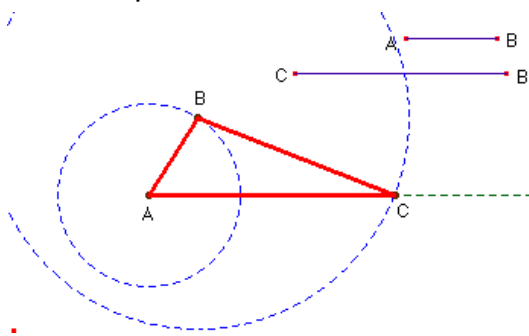
Uno de los ejemplos tradicionales de la relación entre el movimiento de rotación con el desplazamiento en vaivén lo constituye el funcionamiento de la máquina de vapor. Aquí tenemos un triángulo de base variable, cuando B gira alrededor de A, la biela BC transfiere el movimiento a un émbolo que se mueve por el interior de un cilindro.



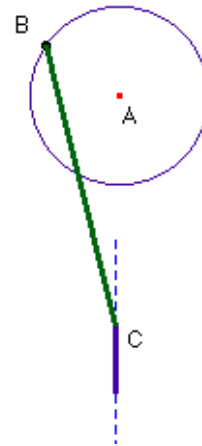
Para analizar esta nueva situación, en lugar de situar el punto C sobre el segmento XY, hacemos que el grado de libertad del sistema recaiga sobre el punto B, la condición que debemos imponer a este punto es distinta a la construcción del gato elevador. Como el segmento AB tiene longitud fija, B ha de ser un punto situado sobre la circunferencia de centro A y radio AB. De otra manera, B sería un planeta del sol A. Para situar la otra varilla de longitud fija debemos hacer un nuevo compás de centro B y radio BC, de esta manera tendremos una circunferencia que corta a la semirecta en el punto C.



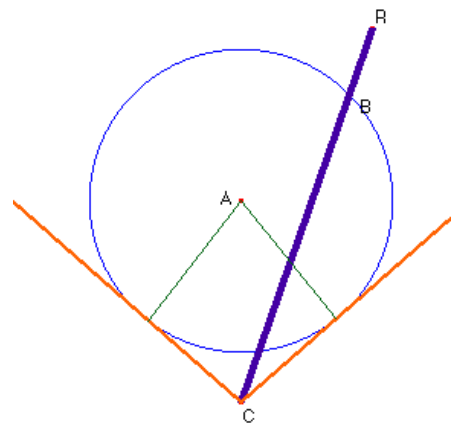
El triángulo de base variable tendrá ahora otra apariencia; un punto B gira alrededor de A e impulsa una biela, uno de cuyos extremos es obligado a moverse por una línea recta.



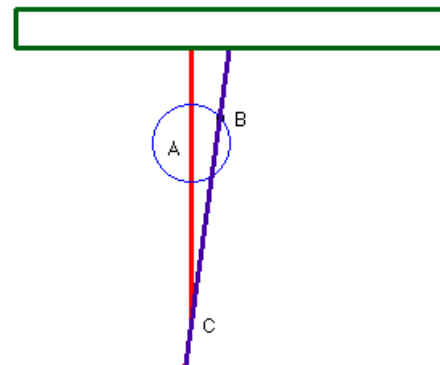
Esta segunda construcción transforma el movimiento de rotación en un desplazamiento de vaivén. Este es el caso de la aguja en la máquina de coser, la rotación de B alrededor de A se lleva al punto C que sólo se puede mover sobre la guía. Ahora podríamos estudiar la influencia de las longitudes de AB y BC sobre los desplazamientos de la aguja situada sobre C.



El mecanismo de brazo oscilatorio se utiliza cuando se desea un movimiento de alimentación lenta y retroceso rápido. Ahora el punto C se hace fijo, mientras el punto B se mueve alrededor de A con velocidad constante. La barra BC tiene una ranura en la que está alojado B de forma que el segmento adquiere un movimiento de vaivén, de forma que tarda mucho más en ir de derecha a izquierda que al revés

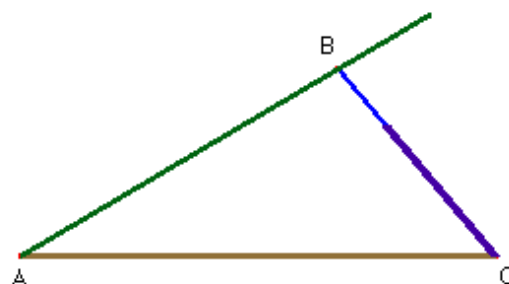


En la limadora el punto B gira alrededor de A con velocidad constante, esto hace que B se desplace sobre una guía perpendicular a AC en un movimiento de vaivén horizontal.

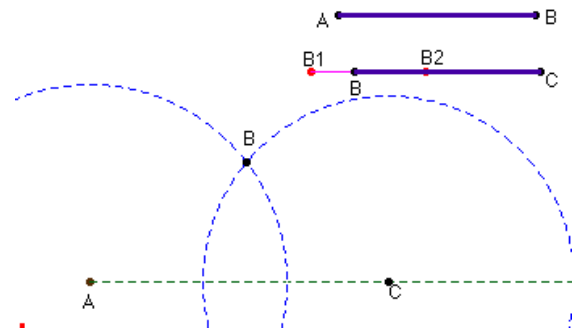


5.3. Tercera construcción: el cilindro hidráulico.

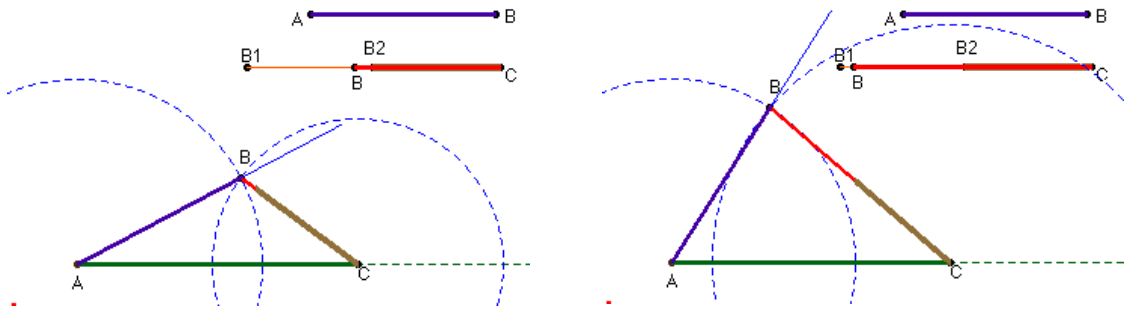
El cilindro hidráulico que se utiliza en volquetes y excavadoras nos sugiere una tercera vía para abordar el triángulo de base variable. Ahora los puntos A y C serán fijos y queremos que la mayor o menor longitud de CB determine la dirección del segmento AB.



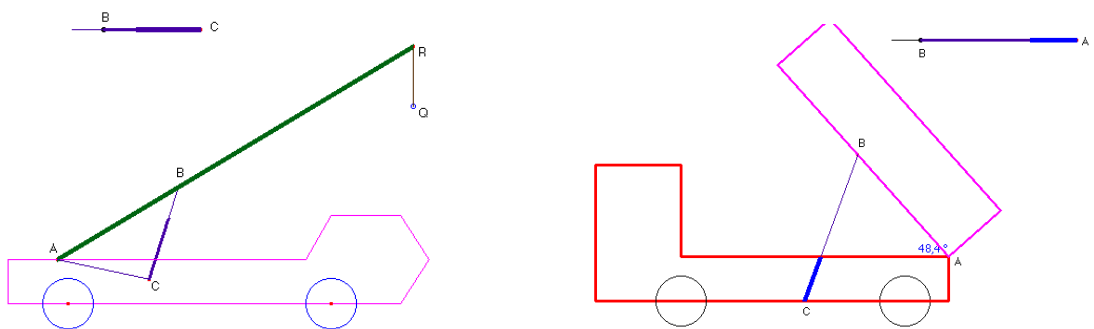
Un cilindro hidráulico puede ser considerado como un cilindro que sale de otro. Tendrá una longitud mínima, que viene dada por la longitud del tubo que le sirve de base, y una longitud máxima que será el doble de la anterior. Esto se puede conseguir en Cabri II con un segmento BC, en el que B es un punto perteneciente al segmento B1B2, donde B2 es el punto medio de CB1.



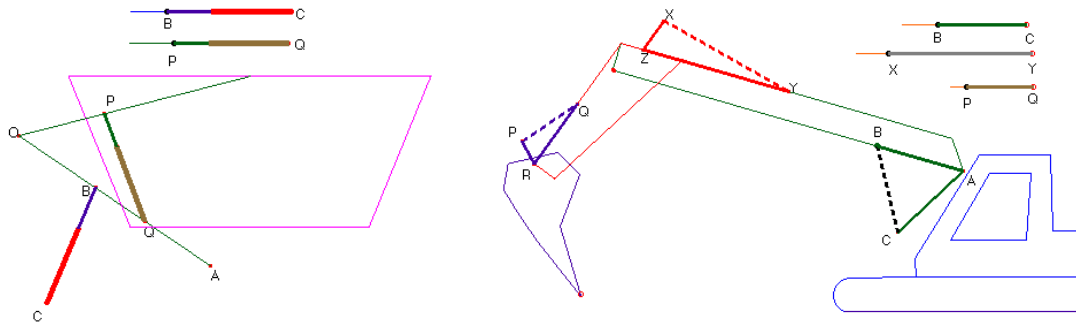
El sistema se gobierna desde el punto B del segmento CB1, que extrae el cilindro hidráulico hacia el exterior y con ello abre el ángulo CAB. Ahora no tenemos más que construir el triángulo y estudiar la relación entre la longitud del cilindro y la medida del ángulo.



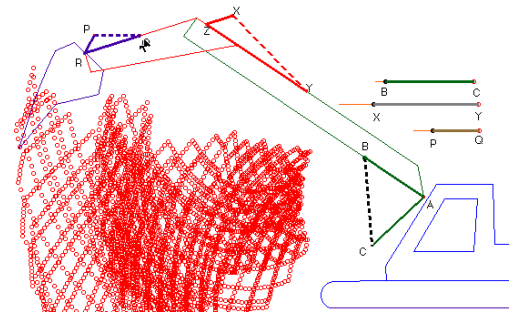
La utilización del cilindro hidráulico como lado de longitud variable en un triángulo articulado, es muy amplia en aquellas barras o plataformas que han de modificar su inclinación de acuerdo con nuestras necesidades. Es el caso del brazo de la grúa o la plataforma del volquete, aunque en éste último, al necesitar que la longitud del cilindro llegue a ser superior al doble del que le sirve de base, es necesario un sistema de cilindro telescópico en el que salgan varias piezas, una dentro de otra.



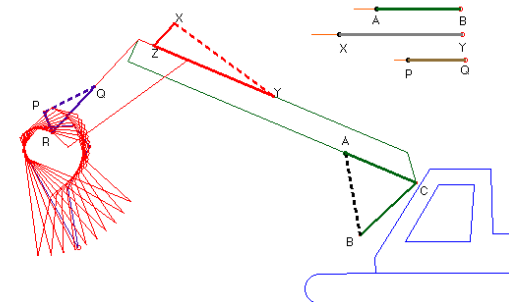
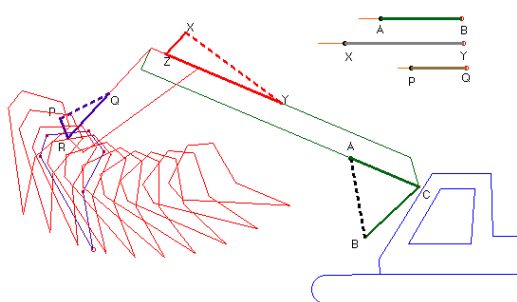
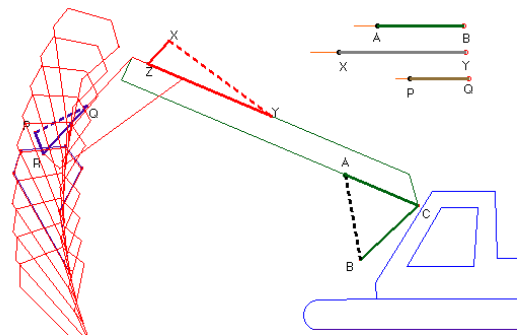
A veces puede ser conveniente combinar dos cilindros hidráulicos para conseguir el movimiento deseado. Se puede idear un mecanismo algo distinto al que se usa para recoger los contenedores de las obras. También tenemos un ejemplo de la combinación de tres cilindros en la excavadora, que está compuesta por dos barras articuladas, cada una con su cilindro hidráulico que modifica su inclinación y además se incorpora un tercero para alterar el ángulo de la pala respecto de la barra a la que está sujeta.



Con Cabri II podemos gobernar cada uno de los cilindros hidráulicos de la excavadora por separado, como lo haría el operador en la cabina. Para hacernos una idea de la región que puede alcanzar la máquina, podemos dejar el trazo de la punta de la pala y realizar una animación múltiple de los tres cilindros al azar. Si lo dejamos actuar un par de minutos tenemos un dibujo como el de la derecha.



Para ver el efecto de cada uno de los cilindros hidráulicos por separado, tenemos la posibilidad de construir el lugar geométrico de un objeto que depende de otro, en nuestro caso nos permite estudiar qué posiciones ocuparía la pala cuando el cilindro toma diez posiciones equidistantes a lo largo de su recorrido. Aquí tenemos las posiciones obtenidas para cada uno de los tres cilindros:



Bibliografía.

BOLT, A. B. y HISCOCKS (1970). Machines, mechanisms and mathematics. Mathematics for the Majority Project. Chatto & Windus. The School Council. London.

BOLT, B. (1992). Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología. Labor: Barcelona.

CUNDY, H. M. et ROLLET, A. P. (1978). Modèles mathématiques. CEDIC: Paris.

MORA, J.A. (1997). De la calle al ordenador. Revista Aula núm. 58. Enero de 1997 pp. 20-21.

O'DAFFER P. Y CLEMENS S. (1977). Geometry: an investigative approach. Addison-Wesley: California.