MODELOS MATEMÁTICOS Y REGRESIÓN.
EL ZOOM DE LA CÁMARA FOTOGRÁFICA

José Antonio Mora Sánchez y Jesús Miguel Grilles Rodríguez

RESUMEN

Con el estudio de un caso práctico, pretendemos aportar algunas ideas acerca de la forma en que los avances tecnológicos facilitan el aprendizaje de las matemáticas. Es el caso de la utilización de la calculadora gráfica para la construcción de modelos en las más diversas situaciones, fundamentalmente por dos motivos: por una parte mecanizan muchas de las tareas que hasta ahora requerían gran esfuerzo, y por otra hacen accesibles conceptos y destrezas matemáticas que antes había que posponer para cursos posteriores.

La propuesta de trabajo consiste en el análisis de una situación compleja: la relación entre la graduación del zoom de la cámara fotográfica y el ángulo de visión que proporciona el objetivo. El problema se aborda desde diversas ópticas que se complementan para aportar una visión amplia del mismo: la regresión estadística, la construcción de gráficas e interpretación de las tendencias y el estudio geométrico que relaciona los distintos elementos del objetivo.

1. LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS.

La modelización matemática es una tarea fundamentalmente creativa del científico en su pretensión de explicar sus observaciones y, aunque en matemáticas siempre ha ocupado un lugar relevante, ahora está llamada a tener mayor incidencia en el currículo de matemáticas de los próximos años. En este artículo hemos seleccionado una situación real: la relación entre la graduación del zoom de la cámara fotográfica y el ángulo de visión que proporciona. El problema se aborda desde tres aproximaciones:

* La estadística ofrece distintas curvas de regresión que se ajustan mejor o peor a los datos que disponemos.
* La analítica permite interpretar las tendencias de las funciones a partir del conocimiento que tenemos de las distintas familias funcionales.
* La geométrica proporciona relaciones entre los distintos elementos del objetivo.

La aportación de cada uno de ellos a las conclusiones finales vendrá dada por un conjunto de factores que en algunos casos serán ajenos al proceso matemático: grado de exactitud requerido, simplicidad deseada, características de las personas a las que van destinados los resultados obtenidos, etc.

En el terreno didáctico, esta confluencia de técnicas puede ser aprovechada para presentar al estudiante relaciones entre distintas partes de las matemáticas, de forma que la vía estadística obtiene unos resultados que serán estudiados desde el análisis de las tendencias en las gráficas de las relaciones algebraicas obtenidas. Además, la visión geométrica es la que nos informa en cada momento de la verosimilitud de los resultados obtenidos y de la consideración de nuevas orientaciones para nuestro trabajo.

Desde el punto de vista de la utilización de recursos didácticos, pretendemos mostrar que la calculadora gráfica no es una mera herramienta que proporciona resultados con rapidez. Por el contrario, es un elemento más que contribuye a provocar la reflexión y el aprendizaje del estudiante. El tipo de análisis propuesto pretende ser de tipo cualitativo: cualquier tendencia observada o resultado parcial obtenido serán discutidos a la luz de los conocimientos que tenemos del tema y de los contenidos matemáticos que disponen los alumnos de bachillerato.

La calculadora gráfica puede realizar cálculos complejos, dibujar una gráfica y obtener una curva de regresión con gran facilidad. Pero la resolución de problemas es algo más que eso: el resolutor ha de saber interpretar los resultados parciales que va obteniendo e integrarlos en el proceso general de resolución para introducir modificaciones en la secuencia compleja de tareas que le lleve al objetivo marcado.

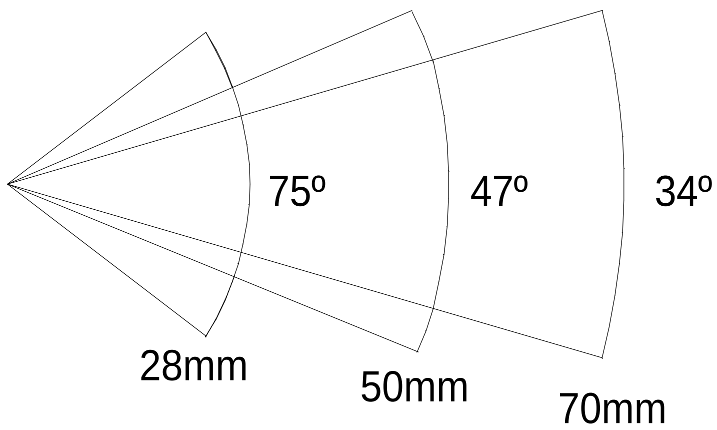
Como paso previo al planteamiento del problema, podemos recurrir a Davis y Herst (1988) para encontrar una definición de modelo matemático: "Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones (estructuras) matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad: su prototipo. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual, tal vez, incluso, otro modelo matemático". Posteriormente complementan esta definición con una apreciación sobre la calidad de los resultados: ”Un modelo puede ser tenido por bueno o malo, por simplista o refinado, por estético o antiestético, por útil o inútil. Sin embargo, uno se siente menos inclinado a calificarlo de verdadero o falso”

2. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

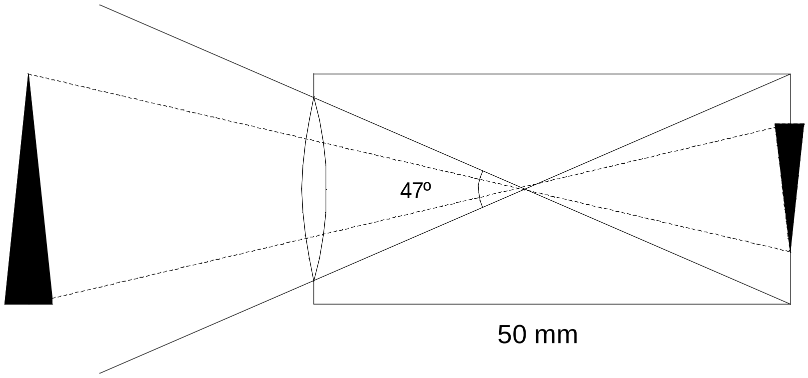
El problema con el que ilustraremos estas ideas está sacado del folleto de instrucciones del zoom de una cámara fotográfica en el que aparecen los siguientes datos de la medida de la distancia focal y el ángulo de visión correspondiente:

Zoom	28	50	70
Ángulo de visión	75º	47º	34º

Un diagrama geométrico de esta relación entre los ángulos de visión y sus distancias focales:

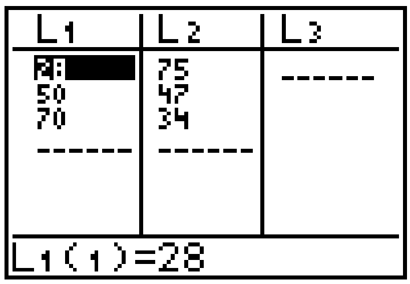


Un esquema de la sección transversal de la cámara resalta nuevas ideas:

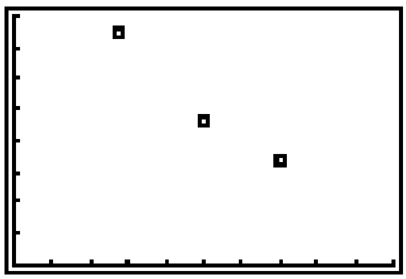


Obtener una relación entre dos conjuntos de números: {28, 50, 70} y {75, 47, 34}, se traduce en la búsqueda de una relación funcional entre la distancia focal del zoom y el ángulo de visión que proporciona. Es una situación interesante para ser abordada mediante métodos de regresión, aprovechando las posibilidades de cálculo y representación de la calculadora gráfica. Sin embargo, queremos distinguir aquí entre el objetivo perseguido: la relación funcional, y el instrumento matemático elegido para ello: los métodos de regresión. Para nosotros será un problema de modelización matemática que va a aprovechar la potencia de la calculadora gráfica con el fin de obtener una relación funcional y no sólo la obtención de una colección de curvas que se ajustan más o menos a los datos del folleto, pero sobre este tema se discutirá más adelante.

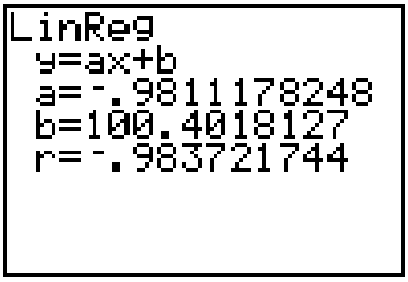
Considerado como problema estadístico, introducimos los datos en la calculadora en forma de listas de números, con el fin de estudiar si existe una relación funcional entre ellos.



La utilización de los instrumentos de representación estadística de la calculadora ofrece la gráfica de la derecha para valores $0<x<100$, $0<y<80$.

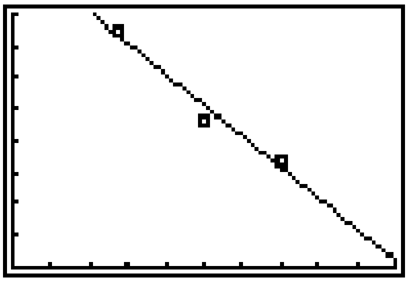


Como se ve, los puntos están "bastante alineados", esto quiere decir que la recta de regresión nos ofrecerá una buena aproximación a los puntos y el coeficiente de correlación, como indicador del grado de correlación, estará muy próximo a -1.



3. REGRESIONES LINEAL Y CUADRÁTICA.

La ecuación de la recta de regresión y el coeficiente de correlación que aparecen a la derecha:

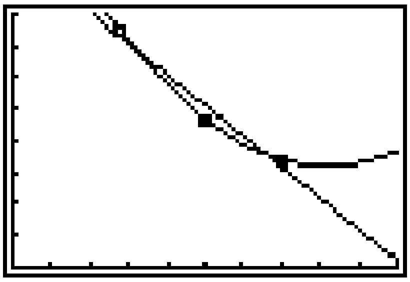


Ahora podemos dibujar la gráfica de la recta junto a los puntos :

La regresión es útil para interpolar (encontrar nuevos valores situados entre los que ya conocemos), aunque es poco útil para extrapolar (encontrar valores alejados del rango de los datos utilizados). Pero ya hemos señalado que la regresión era para nosotros únicamente una herramienta y la vamos a utilizar para estudiar cuál de los modelos funcionales se adapta mejor a la situación planteada.

En el caso que nos ocupa, la recta obtenida tiene la ventaja de ajustarse bastante bien a los valores, pero cuando queremos obtener el valor del ángulo de visión para objetivos de distancia focal grande, presenta el inconveniente de convertirse en negativo, pero esto no es posible por tratarse de valores del ángulo de visión, magnitud que siempre habrá de ser positiva.

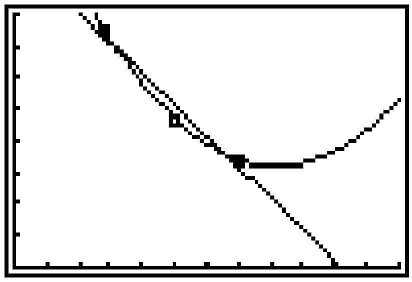
La calculadora gráfica nos proporciona otras curvas de regresión. Además del modelo lineal podemos investigar otros: cuadrático, cúbico, cuártico, logarítmico, exponencial y potencial.



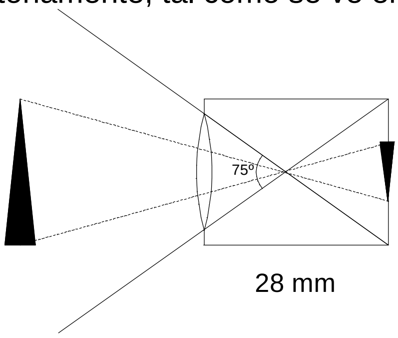
La regresión cuadrática ofrece un mayor ajuste a los puntos. Si seguimos los pasos anteriores para obtener ahora la ecuación cuadrática, tenemos:

$$y = 0.0148 x^2 - 2.4292 x + 131.3939$$

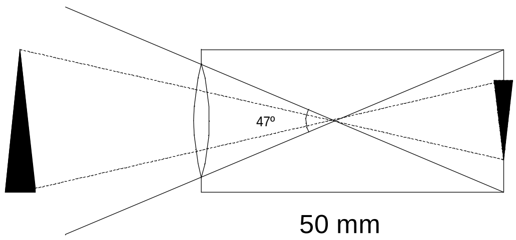
Esta curva ofrece la ventaja añadida de no llegar a tomar valores negativos pero, por lo que sabemos de las parábolas, la rama de la derecha apunta a un crecimiento cada vez mayor conforme aumenten los valores de x, como se pone de manifiesto al representarla para valores 0<x<120:



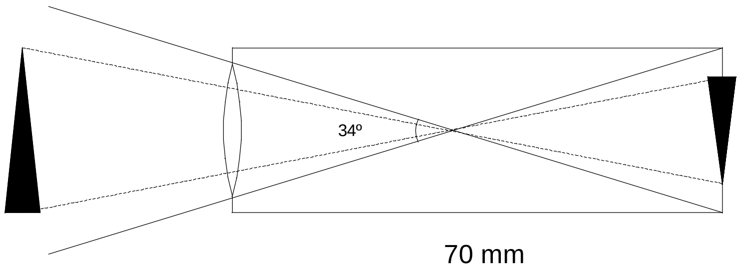
Geométricamente este crecimiento no es posible, ya que, cuando aumentamos la distancia focal (L'>L), el ángulo de visión disminuye ($\alpha'<\alpha$) obligatoriamente, tal como se ve en los esquemas:



28 mm



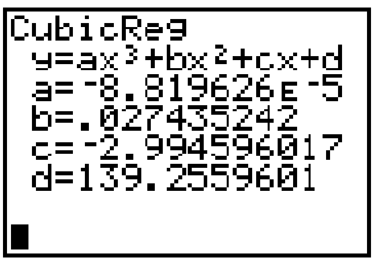
50 mm

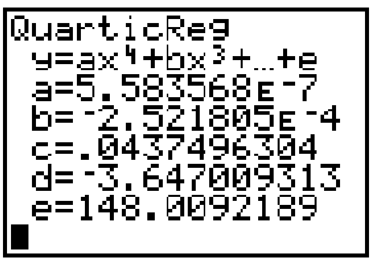


70 mm

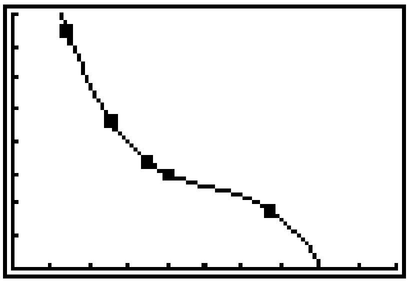
4. POLINOMIOS DE REGRESIÓN DE GRADOS 3 Y 4.

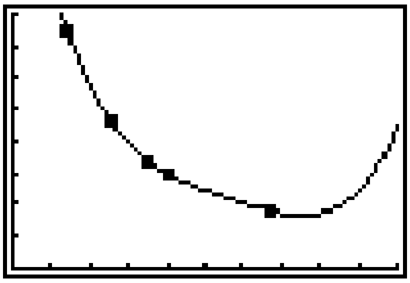
En nuestra búsqueda de la función más apropiada, no podemos utilizar la regresión mediante funciones de tercer o cuarto grado por falta de puntos. En otro objetivo fotográfico encontramos nuevos valores de distancia focal y ángulo de visión: (80,30) y (135,18), que utilizamos para obtener los polinomios:





Aquí tenemos la representación para valores de x entre 0 y 200:



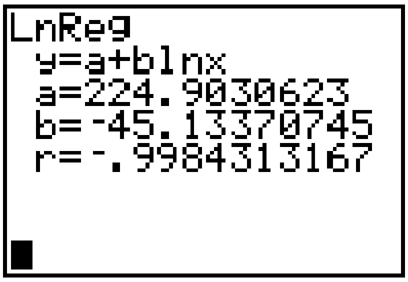


La cúbica no es una buena explicación porque se hace negativa a partir de una distancia focal determinada. Por su parte, la polinómica de grado 4 se asemeja bastante a una parábola (los coeficientes de x^4 y x^3 están muy próximos a 0), y este parecido se hace más patente en un intervalo más amplio que el estudiado. Estas curvas no aportan nada sustancial a lo obtenido con los modelos lineal y cuadrático.

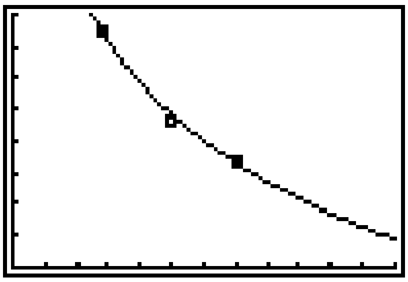
5. REGRESIONES LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL.

Volvemos ahora a los tres puntos iniciales, para seguir con el estudio tal como se inició con la recta y la parábola.

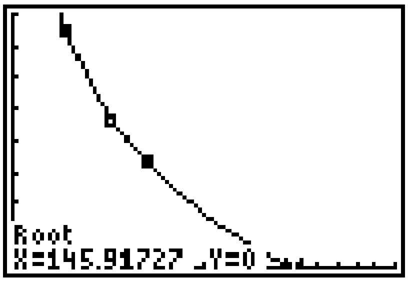
Con la regresión logarítmica el coeficiente de correlación mejora sensiblemente respecto del obtenido para la lineal, haciéndose más próximo todavía a -1.



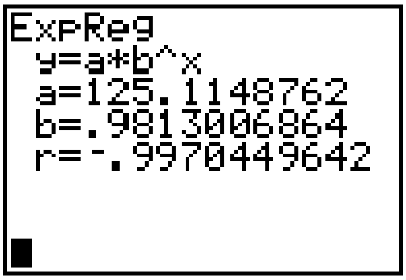
En cuanto a la gráfica (otra vez para 0<x<120) habrá que estudiar si corta al eje de abcisas y se convierte en negativa. Debemos recordar que los valores de y corresponden a ángulos de visión y no tiene sentido que sean negativos.



Si representamos en un dominio más amplio para valores 0<x<200, vemos que la gráfica se hace negativa. La calculadora gráfica permite obtener el punto de intersección de la curva con el eje de abcisas, que es: x=145.91.



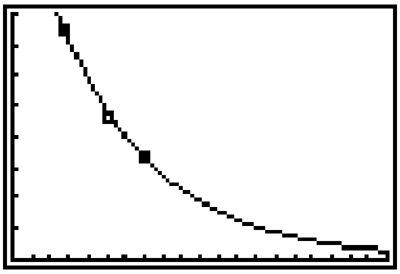
La regresión exponencial empeora algo el coeficiente de correlación



Pero la representación gráfica es más aceptable, ya que no parece que vaya a hacerse negativa . Algunos cálculos apoyan esta idea:

x = 1000 y = 7.93 10^{-7}

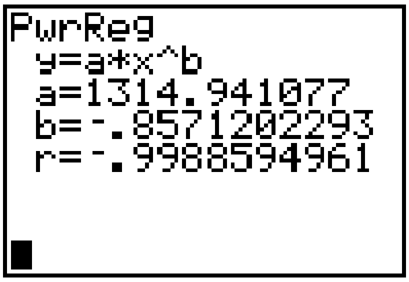
x = 10000 y = 1.31 10^{-80}

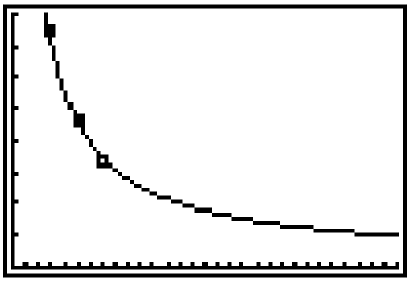


Ahora el análisis de la expresión algebraica el que nos confirma la conjetura anterior: cuando x tiende a infinito, el límite de $125*0.98^x$ tiende a 0 pero siempre será positivo.

6. REGRESIÓN POTENCIAL.

La regresión potencial es la última que ofrece la calculadora gráfica:

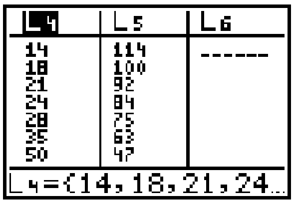




Esta es la que parece proporcionar una mejor aproximación a la función que relaciona la distancia focal con el ángulo de visión, tanto a la hora de interpolar como de extrapolar, por varios motivos:

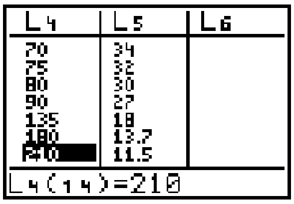
* El valor del coeficiente de correlación es el mejor de los encontrados.
* Su gráfica no cortará nunca al eje de abcisas por ser una asíntota de la función obtenida.
* La función $y=1314.9/x^{0.857}$ se parece mucho a la función de proporcionalidad inversa y=k/x en su expresión algebraica. Gráficamente tiene muchas semejanzas con la hipérbola equilátera.

Podemos ampliar la colección de datos tomando de un catálogo de objetivos una tabla más completa con dos nuevas listas:



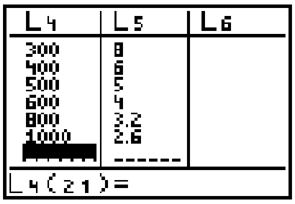
L4	L5	L6
14	114	------
18	100	
21	92	
24	84	
28	75	
35	63	
50	47	

L4={14,18,21,24…



L4	L5	L6
70	34	
75	32	
80	30	
90	27	
135	18	
180	13.7	
210	11.5	

L4(14)=210



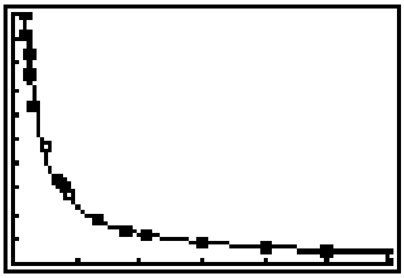
L4	L5	L6
300	8	
400	6	
500	5	
600	4	
800	3.2	
1000	2.6	

L4(21)=

La regresión potencial ofrece ahora la función

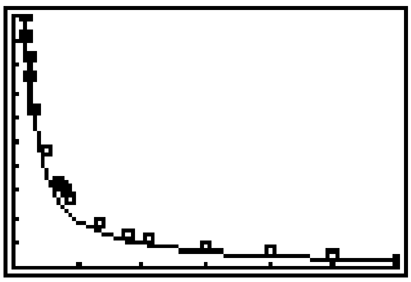
$$y = \frac{1586.6}{x^{0.9230155}} .$$

Aquí tenemos su gráfica para 0<x<600.



El resultado de la regresión potencial tiene un gran parecido con la función de proporcionalidad inversa **y=k/x** y, como es lógico, su gráfica con la hipérbola. Esto nos sugiere una vía de expliración: encontrar el valor de k más apropiado. Se perderá exactitud respecto de la función obtenida en la regresión, pero ganaremos en simplicidad al desaparecer los exponentes decimales. Buscamos la función y=k/x que minimice el promedio de las distancias (medidas sobre la ordenada). Es decir, el valor de k, que hace mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores del catálogo y los de la expresión (K/L) para los 20 valores de L, lo conseguimos con la función:

$$y = \frac{1867.7}{X}$$

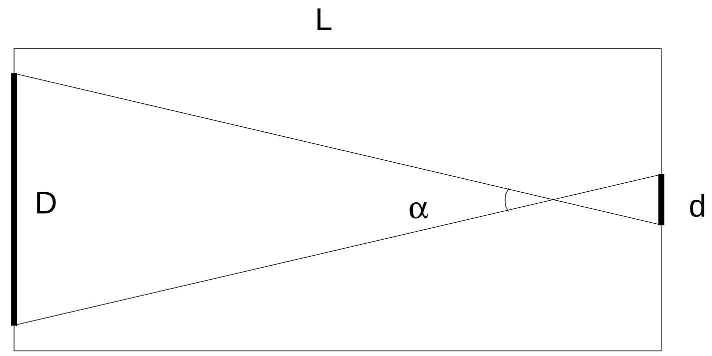


Este resultado no difiere mucho del que se obtiene para la función obtenida en la regresión potencial. Los valores obtenidos de $\Sigma(d_i)^2/20$ para la regresión potencial es de 39.4, mientras que para la función de proporcionalidad inversa anterior es de 46.2, diferencia que no es excesiva, sobre todo si lo comparamos con la que se obtiene de la regresión lineal, que es de 700, o con la regresión cuadrática (396.4), la logarítmica (171) o la exponencial (590). Todos estos datos están referidos a las curvas de regresión obtenidas a partir de los 20 datos del catálogo.

7. MODELO GEOMÉTRICO.

Utilizando el modelo geométrico de un objetivo de distancia focal L y ángulo de visión α, se puede comprobar que la relación entre los parámetros implicados es:

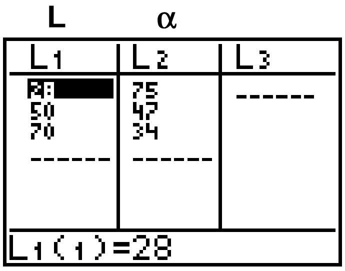
$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{(D + d)/2}{L} \quad (*)$$

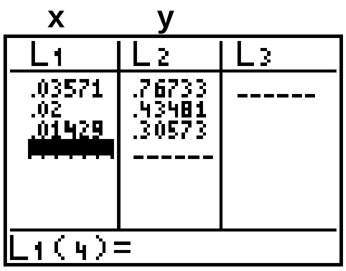


Con el cambio de variables:

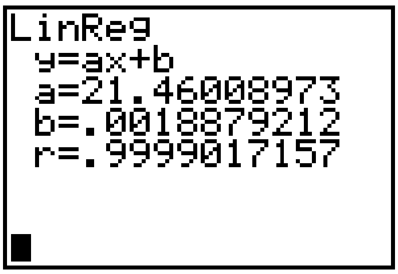
$$x = \frac{1}{L}\ ;\ y = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

conseguimos que la expresión (*) nos quede **y = a x** donde **a = (D + d) / 2**. Así que es justificable una correlación lineal entre las variables **x** e **y**. Veamos qué pasa con los datos:





Si se hace una regresión lineal **y = a x + b** con la calculadora gráfica, obtenemos el resultado de la pantalla de la derecha.



Se puede ver que el parámetro **b** es prácticamente nulo, lo que confirma el modelo, además el coeficiente de correlación es muy bueno y ofrece un valor aproximado para (D+d)/2, 21.468

Cuando realizamos este proceso para la tabla con los 20 pares de valores, obtenemos para (D+d)/2 el valor 21.570.

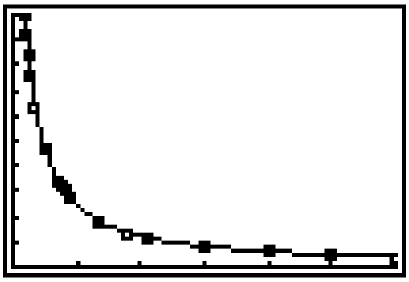
Despejamos en (*):

$$\boxed{\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{D + d}{2L}}$$

o la versión aproximada:

$$\boxed{\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{21.57}{L}}$$

Y su gráfica:



8. CONCLUSIONES.

Las diferentes formas de abordar el problema han proporcionado soluciones al problema de encontrar una relación funcional entre la distancia focal del objetivo **L** y el ángulo de visión α. Aquí tenemos un cuadro resumen de los principales resultados obtenidos con expresiones distintas, según se hayan obtenido utilizando tan sólo los tres datos iniciales o los veinte conseguidos posteriormente:

3 Pares de datos		20 Pares de datos
$\alpha = 100.4 - 0.98\,L$	Recta de regresión.	$\alpha = 58.24 - 0.085\,L$
$\alpha = 1314.9 / x^{0.857}$	Regresión potencial.	$\alpha = 1587 / x^{0.92}$
$\alpha = 2184 / L$	F. proporc. inversa.	$\alpha = 1867.7 / L$
$\alpha = 2 \operatorname{arctg} (21.47 / L)$	Desarrollo geométrico	$\alpha = 2 \operatorname{arctg} (21.57 / L)$

Unos resultados que son exactos o sólo aproximados, simples o refinados, buenos o malos, útiles o inútiles, dependiendo de la finalidad para la que hayan sido construidos y la utilización que se vaya a hacer de ellos. Este es nuestro regreso a los criterios de evaluación que Davis y Herst proponen para los modelos matemáticos: no podemos hablar de un modelo verdadero y otros falsos, sino de unos más apropiados que otros para la función que va a cumplir y los condicionamientos con que han sido construidos.

9. LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS.

En el desarrollo de la tarea propuesta se han atendido conocimientos matemáticos de varios tipos:

* Números: planteamiento numérico de algunas situaciones, comprobaciones para números grandes, etc.
* Álgebra: utilización y manipulación de expresiones algebraicas y ecuaciones.
* Estadística: se ha dado sentido al cálculo de promedios, curvas de regresión y coeficientes de correlación.
* Geometría: obtención de las relaciones trigonométricas entre los distintos elementos geométricos que intervienen en una situación.
* Funciones: clasificar distintos tipos, con el estudio de tendencias y comportamientos tanto globales como locales.
* Resolución de problemas: formulación, usar distintos métodos de resolución y ver sus conexiones, discusión de los resultados, etc.

Merece especial atención el papel ocupado por el estudio de funciones en el desarrollo del trabajo realizado, por la cantidad de conocimientos de tipo cualitativo que se ponen en juego con esta forma de abordar las situaciones. En el curso del trabajo realizado hemos:

* Interpretado gráficas extrayendo de ellas significado, analizado y comparado incrementos y tendencias, y hemos realizado predicciones y conjeturas unas veces mediante interpolaciones y otras con extrapolaciones.
* Construido gráficas, a partir de las expresiones algebraicas obtenidas de la regresión y de las relaciones geométricas.
* Realizado actividades de clasificación, en las que se relacionan distintos tipos de funciones con sus correspondientes gráficas que las caracterizan.
* Utilizado cambios en los ejes y escalas, para obtener en cada momento la gráfica que más información visual ofrece.

La calculadora gráfica ha servido para automatizar algunas de estas actividades, pero en todo momento han correspondido al resolutor las decisiones acerca de las acciones a realizar y la interpretación de los resultados, así como su incorporación al conjunto de conocimientos que ya posee.

BIBLIOGRAFÍA

Davis y Herst (1988). Experiencia matemática. (Labor: Barcelona)
Demana, F., Schoen, H.L., y Waits, B. (1991) Ghaphics in the K-12 curriculum: The impact of the graphing curriculum. Aparecido en “Graphs and Functions”. University of Winconsin. Madison.
García, F.J. (1994). Funciones de la calculadora gráfica. Revista UNO, núm.2, pp 103-107. (Graó: Barcelona).
Monzó, O. y Grilles, M. (1995). La calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas. . Revista AULA, núm 34, pp. 34-39 (Graó: Barcelona)
Mora, J.A. (1995). Calculadoras. (Proyecto Sur: Granada).
Mora, J.A. y García, F.J. (1995). Calculadoras en el bachillerato. Revista AULA, núm 34, pp. 21-27 (Graó: Barcelona).
Mora, J.A. (1995).Las calculadoras en las clases de matemáticas. Revista SUMA núm. 18 pp 49-55. (F.S.P.M.: Granada)
SIGMA. Catálogo de objetivos.

EN MEMORIA DE MIGUEL GRILLES.

Durante este verano falleció Miguel Grilles. Este artículo puede ser un buen lugar para honrar su memoria, porque tuvo origen cuando nos contaba a un grupo de amigos los datos, que había encontrado en el zoom de su cámara. El desarrollo de esta idea responde al espíritu investigador y generoso que le caracterizó.

José Antonio Mora