Herramientas informáticas para la enseñanza de la geometría

José María Gavilán Izquierdo
Ricardo Barroso Campos

Resumen:

Presentamos algunas ideas y reflexiones sobre el uso de programas en la enseñanza de la geometría, usamos dos perspectivas de análisis, desde el punto de vista del conocimiento matemático (¿qué se puede aprender?), y desde el punto de vista del conocimiento profesional del profesor (¿cómo utilizarlo en clase?). Describimos tres programas y aspectos del contenido matemático, con algunos ejemplos tomados de un curso de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria (12-18 años). Aportamos la idea de *no neutralidad* del programa respecto al contenido geométrico. Por último hacemos una aproximación para clasificar las tareas que se proponen para utilizar en el aula por parte de los profesores participantes, lo cual indica los aspectos de uso en la profesión.

Introducción.

Presentamos en este trabajo algunas ideas incluidas en una serie de proyectos de formación de profesores, tanto inicial como permanente, en los que hemos pretendido familiarizar a los profesores en el uso de software en la clase de matemáticas. En concreto, vamos a señalar resultados de la Actividad “Entornos Informáticos en Geometría” desarrollada en el Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira (Sevilla, España) como curso con seguimiento (50 horas) durante el curso 1999/2000 a profesores de Enseñanza Secundaria del área de Matemáticas. Estos cursos tienen dos partes, siendo la primera de ellas presencial, en las que se presentan los programas así como algunas posibilidades de uso. La segunda parte, no presencial, consiste en que, formados en grupos, los profesores diseñan una actuación en el aula basada en el programa que elijan. Este diseño está realizado con el objetivo de llevarlo a cabo en el aula con sus alumnos, dentro del desarrollo normal del curso. En una última sesión, los grupos presentan la actividad diseñada.

Tenemos que señalar que entendemos que el software en una situación de clase puede ser empleado de distintas formas, bien puedes ser un material a disposición del profesor, lo que sería un uso desde una perspectiva de enseñanza, en esta situación los alumnos no tienen acceso al programa; o bien, tener los alumnos acceso a los programas, y trabajan tareas sobre el ordenador y no con lápiz y papel; una metáfora que ilustra esta situación es denominar al aula “laboratorio de matemáticas”, perspectiva que consideramos de aprendizaje. Creemos que el máximo potencial se obtiene cuando se incorpora al aula desde esta perspectiva, que conlleva algunos cambios con respecto a la enseñanza basada en lápiz y papel. Esto afecta tanto al contenido matemático, al papel del profesor como al de los alumnos.

Para empezar, la elección del software no es *neutral*, es decir el tipo de programas condiciona los contenidos matemáticos que van a ir surgiendo, tanto los productos, entendiendo por tales los enunciados de las definiciones, de teoremas, propiedades..., como los procesos[1] de generación de los mismos. Por ejemplo, distinguimos entre el proceso que lleva a establecer una definición con ejemplos y contraejemplos, discriminando los atributos relevantes e irrelevantes, y el resultado de ese proceso que establece a través de determinadas palabras la definición.

El uso de software permite al profesor dar más importancia a los procesos de pensamiento tales como: exploración, conjeturación, refutación, reformulación y explicación (deVilliers, 1.997, p. 23) Además las tareas que se plantean son distintas, en nuestra opinión deja de tener tanto interés plantear preguntas como ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos? Y podemos plantearnos pedir ahora preguntas del tipo ¿qué tienen en común los coeficientes de dos rectas paralelas? Preguntas estas que son conceptualmente más potentes ya que exigen el uso simultáneo de diferentes modos de representación.

En relación al papel del profesor, la gestión del aula es diferente a la tradicional, ya que los alumnos suelen trabajar en grupo sobre el ordenador; cada grupo puede llevar su propio ritmo de aprendizaje, puede proponer sus propios problemas, por ejemplo plantearse dudas del tipo ¿que ocurriría si...? . El profesor orienta y facilita el aprendizaje, en lugar de tomar la dirección y ejercer la única autoridad.

---

[1]El término “proceso” está tomado en este sentido de Dreyfus et all (1.990): lo que hace una persona al hacer matemáticas, por ejemplo, abstraer, generalizar, analizar....

El papel del alumno se ve claramente afectado, las demandas cognitivas son diferentes, debido al tipo de tareas que se le pueden proponer, y además, gestiona su propio aprendizaje (determina su propio ritmo). Se potencia la autoestima matemática y entendemos que puede producirse un cambio de creencias acerca de lo que es la matemática, pasando de considerarla una ciencia cerrada, a una ciencia en construcción y desarrollo.

1.- Descripción de los tres programas.

En este apartado vamos a dar una descripción de tres programas que se han utilizado en diversos cursos y que permiten tratar contenidos geométricos, siendo los tres de distinta naturaleza.

El primero de ellos, Derive (http://www.derive.com), es un asistente matemático, esencialmente es una herramienta de cálculo con posibilidades gráficas. Pertenece a la familia de los Programas de Cálculo Simbólico, como Mathematica o Maple. Entre otras posibilidades permite utilizar de forma paralela el modo algebraico y el modo gráfico (a través de ventanas).

Su uso dentro de la geometría está muy restringido; esencialmente puede hacerse geometría analítica. Entre las posibilidades está:

- utilizar ecuaciones explícitas de rectas, circunferencias, etc,

- uso de ecuaciones en coordenadas paramétricas, tanto de rectas como de circunferencias y otras cónicas, e incluso,

- definición de procedimientos para resolver determinadas tareas algorítmicas, si bien pensamos que las posibilidades de programación son muy restringidas, acorde con su uso.

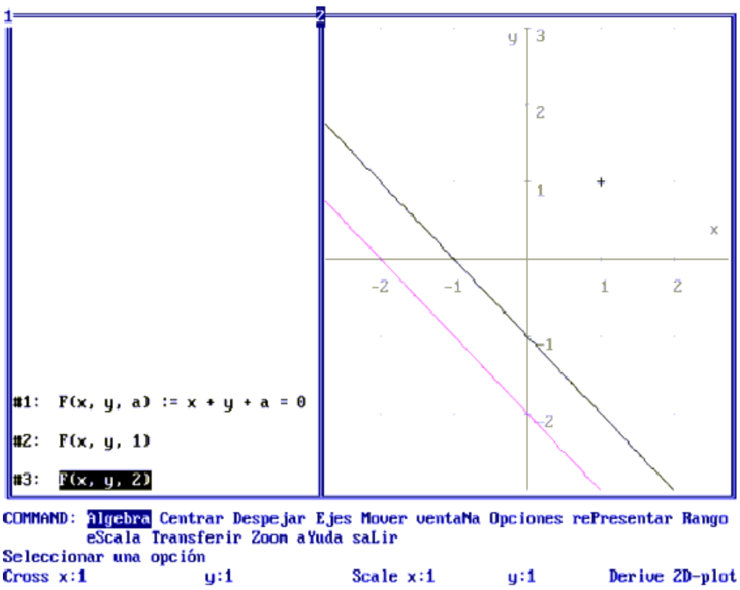

Figura 1

Un ejemplo de su uso en clase puede ser el siguiente, considerar una familia de objetos geométricos (rectas, cónicas) dada por su ecuación con uno o varios parámetros. Así si consideramos la familia ú.

$$ú=\{x+y+a=0, a\in \Re\}$$

¿Qué característica define a la familia? ¿Podrías hacer alguna generalización? (Figura 1).

El segundo de ellos, Cabri II (http://www.cabri.net), pertenece a la familia de los programas de "geometría dinámica[2]" como Geometer´s Sketchpad.

Para Goldenberg y Cuoco (1.998) los programas de geometría dinámica permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observando cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones.

Las construcciones que se realizan con Cabri II se denominan"figuras" para distinguirlas de los simples dibujos, una figura es un experimento geométrico (Laborde, 1.993).Una figura realizada con Cabri obliga al usuario a hacer explicitas las condiciones de la misma en lenguaje geométrico. Estas relaciones explícitas van del usuario al ordenador. A través de la geometría dinámica, el programa pone de manifiesto (es decir hace explícitas) otras relaciones presentes en la figura que no son evidentes al usuario. Es decir en este tipo de programas la clave está en la necesidad de hacer construcciones explícitas y obtener los elementos invariantes a dichas construcciones.

Por ejemplo, consideremos un triángulo y sus tres medianas, que trazadas con Cabri, son segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto, éstas son las relaciones explícitas que debe hacer el usuario, en otro caso, los segmentos al desplazar los vértices (puntos básicos de la construcción) dejarán de ser medianas. Estos programas obligan a definir los objetos geométricos para que sean reconocidos por él, por tanto, el punto de corte debe ser construido por la herramienta específica, pues de lo contrario no existe para el programa.

¿Qué obtenemos del programa? Obtenemos la relación siguiente: que independientemente del triángulo (en lenguaje matemático sería un triángulo arbitrario, un objeto va a permitir la representación de toda la clase), las tres medianas siempre se cortan en un punto. Además podemos indagar las relaciones métricas de distancias que caracterizan al baricentro (Figura 2).

[2]El término "geometría dinámica" fue introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen (Goldenberg y Cuoco, 1.998)

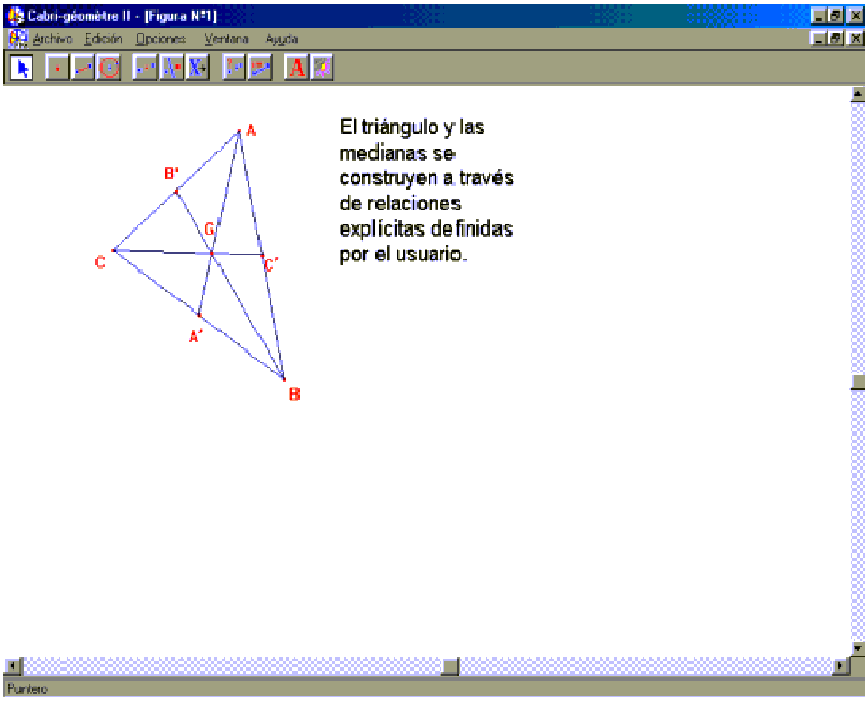

Figura 2

Cabri permite realizar mediciones (longitudes, áreas, etc.) y puede calcular coordenadas de puntos y ecuaciones de objetos. Una posibilidad útil es la de poder definir macro-construcciones que son procedimientos que permiten obtener unos objetos (finales) a partir de otros objetos (iniciales), como se ve en la figura 3. Estas macros pueden ser consideradas como transformaciones, que actúan sobre objetos matemáticos (en este caso geométricos) y facilitar la encapsulación de los mismos y la interiorización de la transformación[3]. Con esto queremos decir que para construir la macro es necesario realizar todos los pasos de la construcción (esto es un nivel de acción). Cuando no se ve necesario realizar todos los pasos, sino que es suficiente saber que con un segmento se determina un cuadrado, se ha interiorizado la acción y se convierte en proceso. Cuando el cuadrado es asimismo transformado por otra acción (por ejemplo una simetría) éste es entonces encapsulado en un objeto.

[3]El sentido dado a los términos objeto, encapsulación e interiorización está tomado del marco APOS desarrollado por Dubinsky (1.991)y Asiala y cols (1.996)

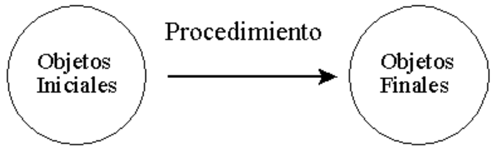

Figura 3

Proporciona un entorno ideal para la búsqueda e investigación de conjeturas en geometría. Se puede plantear el estudio de la geometría desde tres perspectivas distintas: sintética, analítica y de transformaciones.

El último, Win-Logo (http://www.logo.com/), es un entorno de programación, que según Ruiz y otros (1.993), tiene entre otras las siguientes características:

intérprete, por traducir al lenguaje máquina las instrucciones que recibe,

interactivo: abierto a la creatividad del usuario,

modular: se pueden establecer procedimientos que se incorporen a otros,

recursivo: un procedimiento se puede llamar a sí mismo.

Las órdenes básicas se denominan primitivas. Con ellas podemos construir procedimientos. Estos procedimientos admiten la posibilidad de utilizar variables en un sentido funcional, que entendemos positiva para la comprensión del concepto de variable y su posible utilidad en geometría.

2.- La noción de no neutralidad.

Como hemos señalado anteriormente, la elección del software no es neutral, es decir el tipo de programas condiciona el tipo de contenidos a manejar (producto y proceso). ¿En qué sentido es este condicionamiento para los programas?

El uso de Derive se basa fundamentalmente en la utilización de herramientas analíticas; el resultado que aparece en la ventana gráfica está condicionado por la introducción de datos en la ventana algebraica. Lo mismo podemos decir con ciertos matices del entorno Logo. Ninguno de ellos permite al usuario la manipulación de los objetos de la ventana gráfica de manera directa.

El interface de Cabri no está sometido a esta forma de trabajo, pues permite manejar objetos geométricos, previamente definidos, con la filosofía de “pinchar y arrastrar”.

Por ejemplo (Barroso, 2000), consideremos la siguiente tarea a realizar: construir una cometa. Una cometa es un cuadrilátero con pares de lados adyacentes iguales. El hecho de su simetría es fundamental para realizar su programación en Win-Logo. Sería:

```
para cometa :d :a :l
sl av :d gd :a bl
av :l centro
ponrumbo 0
sl av :d gi :a bl
av :l centro
ponrumbo 0
fin
```

Este procedimiento de Win-Logo nos permite realizar la figura cometa según tres variables, que son una diagonal, :d, el ángulo :a suplementario de la diagonal con un lado y la longitud :l de ese lado.

Así, tenemos: cometa 70 60 40 (Figura 4)

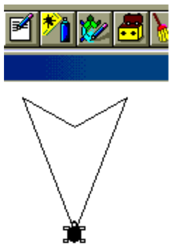

Figura 4

Con Cabri podremos utilizar las propiedades de ser de igual longitud los lados adyacentes, con lo que podremos realizar una construcción a partir de los puntos de corte de dos circunferencias que tengan como radio dichas longitudes (Figura 5).

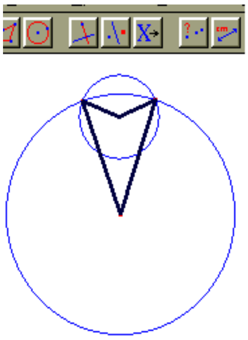

Figura 5

3.- Formación permanente de profesores: una experiencia.

Como señalamos en la introducción, durante las sesiones no presenciales los profesores en grupo debían preparar un conjunto de tareas basadas en el contenido del curso con el objeto de llevarlas a cabo en sus centros (todos eran Institutos de Enseñanza Secundaria) con sus alumnos.

No es nuestro objetivo analizar las propuestas y comentarlas, sino mostrar lo que los profesores plantean realizar y lo que pretenden con ellas; nosotros únicamente hemos puesto la etiqueta "comprobación, indagación" pero el objetivo de las tareas lo proponen los participantes..

Evidentemente, con las tareas propuestas podían haberse buscado otros objetivos, pero no es esa nuestra intención, ya que pretendemos poner de manifiesto una realidad profesional.

Algunos grupos plantearon las dificultades que podían presentarse, entre ellas, la gestión de los alumnos en el aula, la falta de tiempo para llevarlas a cabo, o las dificultades para usar el aula de informática. No obstante, como algunos profesores impartían además de Matemáticas la asignatura de Informática pensaban realizar la experiencia en esta segunda asignatura.

Los grupos de tareas propuestos por los profesores, nos permiten clasificarlas a grandes rasgos en dos categorías:

- tareas de comprobación, y

- tareas de indagación.

Las tareas de comprobación son aquellas en las que el programa se utiliza con el objetivo de verificar que un resultado obtenido sin el ordenador es cierto. Se utilizan propiedades geométricas previas para llegar a plantear u obtener un resultado.

Por ejemplo en este grupo está la siguiente tarea, planteada por Hernández González A. R. y Terrón Macías D.

Se le pide al alumno que cargue en la pantalla el fichero act11.fig de Cabri, previamente preparado (tal y como aparece en la Figura 6).

Hallar los ángulos desconocidos utilizando los datos de cada figura y los teoremas sobre ángulos de lados paralelos y perpendiculares.

Verificar los resultados usando las herramientas proporcionadas por Cabri: mediciones de ángulos.

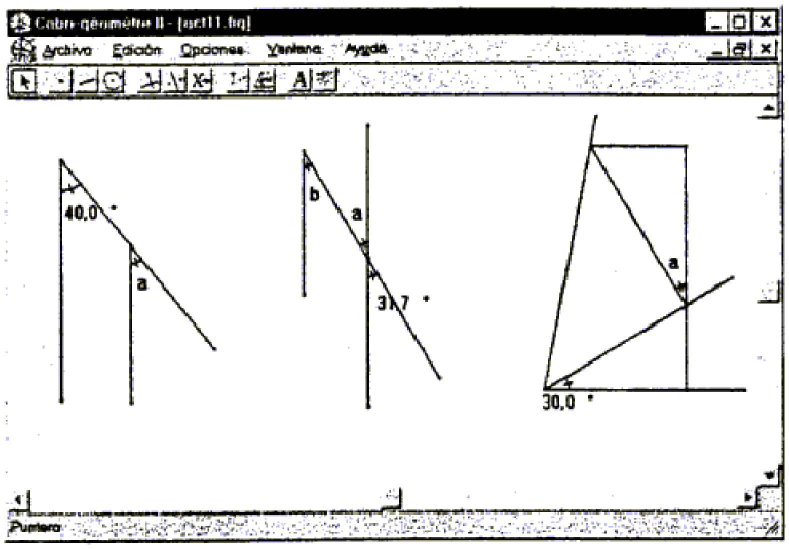

Figura 6

Las tareas de indagación son tareas abiertas donde no se conoce la repuesta pero la herramienta para su obtención es el propio programa. Este tipo de tareas permiten el descubrimiento de resultados y la búsqueda de su justificación.

Un ejemplo de tareas de este tipo es la propuesta por el mismo grupo de profesores, es la siguiente:

Se le proporciona al alumno un archivo con una figura, como en la figura 7, y se les pide que averigüen si los triángulos construidos son semejantes.

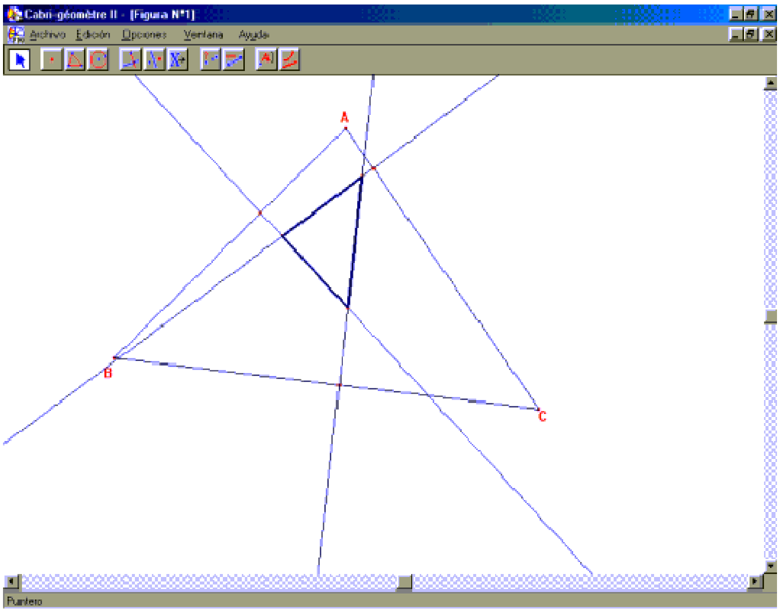

Figura 7

Agradecimientos:

Deseamos expresar nuestro agradecimiento al Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira (Sevilla) por su apoyo y especialmente al Coordinador Rafael Rivero su por confianza. Así como a los profesores participantes por su colaboración. Agradecer también los comentarios de los evaluadores que han mejorado este trabajo.

Bibliografía:

Asiala M., Brown A., Devries D. J., Dubinsky E., Mathews D. Y Thomas K.(1.996): *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*. En Kaput J., Schoenfeld A. y Dubinsky E. (edts), Research in Collegiate Mahematics Education II. American Mathematical Society y Mathematical association of America.

Barroso R. y Gavilán J. M. (1.999): *Entornos informáticos en Geometría*. Documento de Trabajo del curso del mismo título impartido en el Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira.

Barroso R. (2000):*Win-Logo, un lenguaje para una innovación en Didáctica de la Geometría*. Comunicación presentada a las II Jornadas de Calidad de las Universidades Andaluzas, Sevilla.

Dreyfus T. et al (1.990): *Advanced Mathematical Thinking*, en Nesher P. y Kilpatrick J. (Edtrs) Mathematics and Cognition . Cambridge University Press, Cambridge.

Dubinsky E. (1.991): *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*, en Tall D. (Edt) Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 95-123

Goldenberg E. P. y Cuoco A. A. (1.998): *What is Dynamic Geometry?* En Lehrer R. y Chazan D. (Edtrs) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah.

Laborde C. (1.993): *The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry*, en Keitel C. Y Ruthven K. (Edtrs) Learning from computers: Mathematics Education and Tecnology. Springer-Verlag, Berlin.

Ruiz Carrascosa J. y otros (1.993): *Logo para Educación Secundaria: Módulos de trabajo para el alumno y orientaciones metodológicas para el profesor*. Centro del Profesores, Jaén.

Villiers M. de (1.997): *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections*, en King J. y Schattschneider D. (Edtrs) Geometry Turned On. The Mathematical association of America, Washington.

José María Gavilán Izquierdo
(gavilan@cica.es)
Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla (España).

Ricardo Barroso Campos
(rbarroso@cica.es)
Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla (España).