Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*

EVA CID CASTRO**

Actualmente, parece haber un consenso general en que la introducción de los números negativos en el aula debe basarse en modelos concretos: deudas y haberes, temperaturas, movimiento en dos sentidos, etc. Se supone que estos modelos, al ser familiares al alumno y poseer un grado de abstracción adecuado a su edad, le ayudarán a dar sentido a los números negativos y a justificar sus reglas de cálculo. Tanto los libros de texto como la mayor parte de las propuestas de los investigadores en el tema van en esa línea, diferenciándose únicamente en la elección del modelo. En esta ponencia ponemos en duda la pertinencia de una introducción de los números negativos por medio de modelos concretos, analizando los efectos no deseados que produce.

La modelización de las nociones aritméticas elementales

Una de las funciones de las matemáticas es la modelización del mundo sensible. Para estudiar un sistema físico, social, químico, biológico, etc., se construyen, cada vez con más frecuencia, objetos matemáticos cuya manipulación permite obtener información sobre el sistema objeto de estudio. Por ejemplo, ante el fenómeno de la caída libre de los cuerpos, el estudio matemático de la ecuación $y = y_0 + v_0t - (1/2)gt^2$ nos da información sobre la posición de los cuerpos cuando caen, su velocidad, etc. Decimos entonces que esa ecuación es un modelo[1] matemático de dicho fenómeno.

En el proceso de modelización matemática, propio de las ciencias experimentales o sociales, el objeto de estudio es un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible, mientras que el sistema matemático es el modelo que lo representa. Esto quiere decir que lo que nosotros realmente estudiamos es el modelo matemático, deduciendo, a partir de él, el comportamiento del sistema inicial. El modelo es, por consiguiente, un dispositivo mediador entre nuestra necesidad de conocer y nuestra capacidad para hacerlo.

Pero en la enseñanza de la aritmética elemental esta relación entre objeto de estudio y modelo se invierte. Nuestro objeto de estudio es ahora una noción aritmética: número natural, suma, resta, etc., y buscamos un sistema físico o social con el que nuestros alumnos estén familiarizados para, a través de él, mostrar y justificar el comportamiento de la nueva noción. Así, por ejemplo, desde un punto de vista antropológico, las operaciones aritméticas de suma y resta de números naturales se construyeron para modelizar un sinfín de situaciones en las que se reúnen, separan o comparan ciertas colecciones de objetos o seres, o bien se añaden o suprimen elementos a una colección dada. La utilización adecuada de la fórmula $a = b + c$ permite obtener información sobre el cardinal de algunas de dichas colecciones a partir del conocimiento del cardinal de las otras. Sin embargo, en la enseñanza primaria se justifica el comportamiento y las propiedades de la suma y la resta de números naturales haciendo razonamientos sobre situaciones de añadir, quitar, etc., con las que se supone que el alumno está familiarizado. Ahora el objeto de estudio es la noción matemática de suma o resta de números naturales y las situaciones de añadir o quitar, el modelo que actúa de dispositivo mediador y nos permite obtener información y justificar ante los alumnos el comportamiento de la noción matemática.

Por consiguiente, en la enseñanza elemental, en vez de modelizar el sistema físico por medio del modelo matemático, lo que se hace es modelizar la noción matemática que se quiere enseñar por medio de algún sistema o fenómeno físico o social. La razón de este proceder radica en que estos últimos están mucho más cerca de la experiencia cotidiana del niño que las nociones aritméticas que se quieren enseñar. Además, esos sistemas están compuestos por objetos del mundo sensible, objetos que los alumnos pueden ver y tocar –de ahí el nombre de 'modelos concretos'–, con lo que se supone que el grado de abstracción que necesita el niño para argumentar sobre ellos es menor que si se trabaja directamente con las nociones aritméticas.

El modelo concreto tiene aquí una doble función: por un lado, justifica el comportamiento de la noción aritmética, nos dice por qué sus reglas de uso son las que son y no otras, nos hace ver que la construcción de la noción no es caprichosa, no es así «porque sí». Por otro lado, permite al niño reconstruir, en caso de olvido, las reglas de uso de la noción, por medio del análisis de un sistema que le resulta familiar y en el que puede argumentar con un grado de abstracción adecuado a su edad. El modelo concreto es un apoyo para la comprensión de la noción y también para su reconstrucción en caso de olvido.

Ahora bien, para realizar esta inversión de la que hablamos se elige uno o varios de los sistemas físicos o sociales que la noción matemática modeliza, no todos los posibles. Además, la enseñanza no puede olvidar el papel de las nociones aritméticas como modelos de la realidad, debe mostrar que las matemáticas «tienen aplicaciones», que «sirven para resolver problemas reales». Por eso, cuando el profesor considera que el niño, ayudado por el modelo concreto, ha construido una concepción de la noción «suficientemente buena», invierte de nuevo los términos y propone diferentes situaciones que pueden ser modelizadas por esa noción. De esa manera, las matemáticas recuperan su función habitual dentro de la cultura: modelizan en vez de ser modelizadas por el mundo sensible. Así, por ejemplo, una vez que los niños han adquirido una cierta concepción de las nociones de suma y resta de números naturales, a partir de situaciones de añadir o quitar, el profesor propone situaciones de comparación y pide a los niños que las modelicen en términos de sumas y restas.

Todas las nociones de la aritmética elemental se enseñan siguiendo estas pautas: los números naturales ligados a la cardinalidad de ciertas colecciones de objetos, la suma y la resta ligadas a situaciones de añadir o quitar, la multiplicación a situaciones de añadir reiteradamente, la división a situaciones de reparto, las fracciones como partes de un todo, los decimales como medidas del sistema métrico decimal, etc. No es de extrañar, por tanto, que cuando llega el momento de enseñar los números enteros[2] nos encontremos con el mismo fenómeno: por una parte, la introducción de la noción por medio de uno o varios modelos concretos que dan razón de su comportamiento y, por otra, la presentación de problemas aritméticos que se resuelven en términos de números enteros, lo que justifica la utilidad de la noción y, por consiguiente, la necesidad de enseñarla y aprenderla.

Los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros

¿Qué modelos concretos se utilizan en la enseñanza de los números enteros? Los más usados en los libros de texto son: deudas y haberes o pérdidas y ganancias, juegos con puntuaciones positivas o negativas, personas que entran o salen de un recinto o suben o bajan de un medio de locomoción, temperaturas medidas por un termómetro, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, personas que suben o bajan escaleras, ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos, años antes o después de Cristo, objetos o seres que recorren un camino con dos sentidos de recorrido y, por último, posiciones y desplazamientos sobre la recta numérica.

Pero, además, las propuestas didácticas sobre los números enteros recogidas en libros, artículos y comunicaciones a congresos incluyen otros varios modelos: fichas o bloques de dos colores, bolas que se ensartan en dos varillas, ejércitos que se enfrentan cuerpo a cuerpo, seres u objetos valorados positiva o negativamente que entran o salen de un recinto, cargas eléctricas positivas o negativas, acciones de añadir o quitar u operadores aditivos, clavijas con tres posiciones, estimaciones con errores por exceso o defecto, cubitos que calientan o enfrían un líquido, artefactos que suben (o bajan) por encima (debajo) del nivel del mar, balones de helio y sacos de arena que elevan o bajan un globo, fichas de dominó en las que los puntos situados en una de las partes de la ficha neutralizan a los situados en la otra parte, cintas de vídeo que se proyectan o rebobinan, variaciones en el nivel de agua de un depósito, etc.

Como consecuencia de la profusión de modelos concretos existentes, Janvier (1983) estableció una clasificación que simplificaba la tarea de analizarlos uno por uno. Partiendo de dicha clasificación, nosotros hablaremos de 'modelos de neutralización' o 'modelos de desplazamiento', según el papel que juegan en cada modelo concreto los signos predicativos y operativos[3]. En los modelos de neutralización los objetos que se manejan son cantidades de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos. Cuando dos cantidades de magnitud son iguales en valor absoluto, pero de sentidos opuestos, se neutralizan entre sí. En este caso, los signos predicativos indican el sentido de la cantidad de magnitud y los signos operativos se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar. Ejemplos de modelos de neutralización son: deudas y haberes, personas que entran o salen de un recinto, juegos con puntuaciones positivas o negativas, fichas de dos colores que se neutralizan, cargas eléctricas positivas o negativas, etc.

En cambio, en un modelo de desplazamiento los números enteros indican desplazamientos o posiciones y los signos predicativos el sentido del desplazamiento o la situación de la posición a uno u otro lado de la posición origen. En cuanto a los signos operativos, pueden significar composición de desplazamientos o aplicación de un desplazamiento a una posición para obtener otra posición. Entre los modelos de desplazamiento podemos citar: el termómetro, el ascensor, las escaleras que se suben y bajan, las altitudes por encima y debajo del nivel del mar, los años antes y después de Cristo, los caminos con dos sentidos de recorrido, las posiciones y desplazamientos sobre la recta real, etc.

A continuación, expondremos en detalle cómo se justifica la estructura algebraica de los números enteros a partir de modelos de neutralización o de desplazamiento. Utilizaremos para ello un caso particular de modelo: el de las fichas de dos colores para ejemplificar el modelo de neutralización y el de las fichas que se desplazan a lo largo de un camino para el modelo de desplazamiento. Entendemos que esta restricción no quita generalidad al tema y permite una mayor claridad y sencillez en la exposición.

Descripción de los modelos de neutralización y desplazamiento

En el modelo de neutralización manipularemos fichas de dos colores, por ejemplo, rojas y azules, bajo el supuesto de que cada ficha de un color neutraliza a una ficha del otro color. La existencia de a fichas rojas y b fichas azules se representa mediante el par ordenado (a, b) o bien mediante el número natural $|a-b|$ precedido del signo + o –, según que las fichas que queden después de neutralizarse unas con otras, sean rojas o azules.

La suma se interpreta como una reunión de fichas, o bien como una acción de añadir fichas a un conjunto dado de ellas, seguida del correspondiente proceso de neutralización para obtener la representación canónica del resultado. En cuanto a la resta, se relaciona con la acción de quitar o separar fichas. Cuando se quieren quitar más fichas de un color de las que se dispone, se añaden pares de fichas azules y rojas hasta poder efectuar la acción. La realización de este proceso en distintos casos muestra que quitar fichas de un color equivale a añadir el mismo número de fichas del otro color.

La justificación del orden de los números enteros exige la introducción de una valoración moral que establezca que el sentido positivo es «mejor» que el negativo. Por ejemplo: es mejor tener fichas rojas que azules, es mejor tener haberes que tener deudas, es mejor tener puntos positivos que negativos, etc. En estas condiciones, cuantas más fichas azules se posean «peor» es la situación, más esfuerzo habrá que hacer para neutralizarlas y pasar a tener un saldo positivo, un saldo de fichas rojas.

El producto de enteros se puede justificar en este modelo diciendo que, por ejemplo, $(-a)(-b)$, significa que a una situación cero hay quitarle a veces b fichas azules. Para efectuar esa acción necesitamos introducir ab parejas de fichas rojas y azules; esto nos permite quitar b fichas azules un número a de veces y quedan ab fichas rojas, lo que justifica que $(-a)(-b)=+ab$. De manera análoga, se justifica el resultado en los casos: $(+a)(+b)$, $(-a)(+b)$ y $(+a)(-b)$.

Otra forma de justificar el producto en un modelo de neutralización es introduciendo la noción de ganancia (aumento de la cantidad de magnitud en el sentido positivo) o pérdida (disminución de la cantidad de magnitud en el sentido positivo) por unidad de tiempo. De esa manera, uno de los términos del producto indica la ganancia o pérdida por unidad de tiempo y el otro el número de unidades de tiempo pasado o futuro a considerar, mientras que el resultado es la pérdida o ganancia total.

En cuanto al modelo de desplazamiento, partimos de un camino troceado en casillas donde cada casilla es una posición que puede ocupar una o varias fichas. El camino no tiene principio ni final o, por lo menos, la posición considerada como inicial no se corresponde con el principio o el final del camino. Las distintas posiciones se numeran a partir de la posición inicial, añadiendo el signo + o – según que el sentido de recorrido sea uno u otro. También se cuantifican los desplazamientos: un desplazamiento de $+a$ casillas, con a natural, aplicado a una ficha situada en una casilla cualquiera, significa que ésta se desplaza a casillas en el sentido positivo de recorrido, mientras que un desplazamiento de $-a$ casillas indica que la ficha recorre a casillas en el sentido de recorrido negativo. En este modelo los números enteros pueden indicar tanto posiciones como desplazamientos. Además, para cada desplazamiento existe un desplazamiento opuesto, es decir, un desplazamiento que devuelve la ficha desde la casilla final hasta la inicial.

La suma de enteros se justifica, bien como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, bien como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento, bien como una composición de desplazamientos que se aplica a una ficha situada en la casilla cero y da como resultado la nueva posición de la ficha. La resta significa la operación inversa de cualquiera de las anteriores: desplazamiento que permite pasar de una posición a otra, posición resultante de aplicar a una posición inicial el opuesto de un desplazamiento, composición de un desplazamiento con el opuesto de otro, etc.

El orden se justifica interpretando los números enteros en términos de posiciones. En estas condiciones, un número entero es menor que otro si, utilizando el sentido de recorrido definido como positivo, la posición que representa al primer número es anterior a la correspondiente al segundo número. En algunos modelos como, por ejemplo, el del termómetro, el sentido de recorrido positivo no se establece simplemente por convenio, como es habitual en este tipo de modelos, sino que responde a una valoración de las situaciones en términos de «mejor» o «peor» (estar a 3 grados sobre cero es «mejor» que estar a 10 grados bajo cero porque hace «más calor»).

El producto se interpreta como composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante al que se le cambia o no el sentido según que el entero que indica la repetición sea negativo o positivo. También puede interpretarse que el desplazamiento resultante se aplica a una ficha situada en la posición cero y, en ese caso, el producto representa la nueva posición de la ficha. Algunos autores consideran que el producto $(\pm a)(\pm b)$, con a y b naturales, indica la posición resultante de transformar una posición inicial $\pm a$. El valor numérico de la nueva posición pasa a ser ab y, dependiendo de que el signo que acompañe a b sea positivo o negativo, estará situada en la misma semirrecta que $\pm a$ o en la semirrecta opuesta.

Otros autores incorporan a los modelos de desplazamiento la noción de velocidad positiva o negativa y tiempo pasado y futuro y, en esas condiciones, los términos del producto indican desplazamientos y tiempos y el resultado es una posición. Cuando el modelo de desplazamiento es el de la recta real, es decir, el modelo en el que las posiciones son puntos sobre la recta, algunos autores justifican el producto de enteros utilizando dispositivos gráficos parecidos a los que suelen utilizarse para explicar las homotecias de razón entera o interpretando el producto ab, con a y b enteros, como el área del rectángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (a, b), $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, 0)$ acompañada del signo + o – según el cuadrante en que esté situado.

Inconvenientes que plantea el uso de modelos concretos

Los modelos concretos permiten justificar bastante bien la estructura aditiva de los números enteros. Sin embargo, no resultan tan eficaces como medio de reconstrucción de dicha estructura en caso de olvido. En realidad, el conocimiento previo que tienen los profesores del comportamiento de los enteros es una guía que les permite elegir dentro del modelo aquellos argumentos que les conducen al establecimiento correcto de las reglas de suma y resta pero, si no se conoce previamente lo que se quiere obtener, es muy fácil seguir una argumentación que lleve a cometer errores. Por ejemplo, un alumno podría pensar que (+70) – (–10) = +70 porque «si tengo 70 pesetas y me perdonan una deuda de 10 pesetas sigo teniendo 70 pesetas». Naturalmente, el profesor utiliza otro razonamiento dentro de ese mismo modelo[4], pero hay que reconocer que el primero es perfectamente válido desde el punto de vista del «sentido común», que es a lo que se apela cuando se trabaja con modelos muy familiares a los niños. De la misma manera, podríamos deducir que (–6) – (–2) = +4, diciendo que «entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero hay 4 grados de diferencia y 4 es lo mismo que +4»[5].

El tema se complica cuando se intenta justificar la estructura ordinal de los números enteros. Ya hemos comentado que, con mucha frecuencia, esta justificación exige una valoración adicional sobre si una determinada situación es mejor o peor que otra pero, qué niño va a aceptar que tener 5 fichas azules es peor (o menos) que tener 2 fichas azules, o que efectuar un desplazamiento hacia la izquierda de 5 casillas es peor (o menos) que efectuar un desplazamiento hacia la izquierda de 2 casillas. La mayor parte de los modelos no permite hacer creíble esa valoración adicional que califica las situaciones de «mejores» o «peores». Sólo algunos de ellos, como las deudas y haberes o el termómetro, admiten este tipo de argumentos. Por ejemplo, se puede justificar que –10 < –5 porque «deber 10 pesetas es peor que deber 5 pesetas» o porque «5 grados bajo cero es una temperatura más alta que 10 grados bajo cero». Pero incluso en estos casos, se encuentran argumentos igualmente válidos que justifican lo contrario. Podemos decir que «una deuda de 10 pesetas es mayor que una deuda de 5 pesetas» o que «el que debe 10 pesetas debe más que el que debe 5 pesetas», todo lo cual incita a pensar que –10 > –5, o que «10 grados bajo cero es una temperatura más baja que 5 grados bajo cero» y, por lo tanto, mayor, en el sentido de que supone un aumento del frío.

Por otro lado, el argumento habitual en los modelos de desplazamiento de definir un sentido de recorrido y considerar menores las posiciones anteriores según ese sentido de recorrido, aparte de ser un convenio que en absoluto es familiar a los niños, contradice el sentido de recorrido que se utiliza para dibujar el modelo. En concreto, en el modelo de la recta numérica se define un sentido de recorrido de izquierda a derecha que permite justificar que –8 < –5 porque «–8 está a la izquierda de –5». Sin embargo, los niños, al dibujar la recta numérica, la recorren de otra manera: primero representan el origen y a partir de ahí, hacia la derecha, van representando los puntos +1, +2, +3, etc., para pasar después a dibujar los puntos –1, –2, –3, etc., es decir, recorren la recta desde el origen hacia la derecha y después desde el origen hacia la izquierda. Ese es el sentido de recorrido que se impone y, de acuerdo con él, –5 se dibuja antes que –8, lo que sugiere que –5 < –8.

En resumen, los modelos concretos justifican con dificultad la estructura ordinal de los números enteros (desde luego, con mucha más dificultad que la suma o la resta) e incluso, podríamos decir que fomentan la aceptación de un orden de izquierda a derecha para los enteros positivos y de derecha a izquierda para los enteros negativos[6]. La relación de orden[7] resultante podría definirse como sigue: un número entero a es menor o igual que un número entero b si, y sólo si, el valor absoluto de a es menor o igual que el valor absoluto de b. Así, por ejemplo, –3 sería menor que –5 porque 3 es menor que 5.

En cuanto al uso de modelos concretos para justificar el producto de números enteros, la mayoría de los investigadores opina que ninguno de ellos permite resolver el problema de manera razonable. Las justificaciones del producto de enteros basadas en modelos concretos son tan artificiosas y tan alejadas de la experiencia de los niños, tan poco creíbles, como el hecho mismo de afirmar, sin más explicaciones, que «menos por menos es más». Por ejemplo, en el modelo de neutralización hay que interpretar (–3)(–2) como «quitar tres veces 2 fichas azules (o bien deudas o cargas eléctricas negativas o puntuaciones negativas, etc.)» y las manipulaciones sucesivas nos llevan a que eso es equivalente a «añadir 6 fichas rojas», lo que nos permite establecer que (–3)(–2) = +6. Esto significa que –3 ya no indica 3 fichas azules, como venía sucediendo hasta el momento, sino que ahora es un operador, un multiplicador que actúa reiterando el término –2 (que, en cambio, sí que indica 2 fichas azules) y avisando de que el resultado de esa operación debe de ser «quitado» de algún sitio. Es decir, hay que interpretar que el signo que acompaña al número 3 es un signo operativo, mientras que el que acompaña al número 2 es predicativo. Además, el hecho de identificar el resultado +6 con la frase «añadir 6 fichas rojas» obliga a asumir que el signo que precede al número 6 es a la vez predicativo y operativo.

El mismo análisis se puede hacer en el caso de los modelos de desplazamiento. Por ejemplo, en el producto (–3)(–2) el término –3 no puede interpretarse como un desplazamiento o una posición, sino que debe ser entendido como un multiplicador que reitera un multiplicando, el desplazamiento o la posición –2, cambiando su sentido. Aparece de nuevo la misma confusión entre signos operativos y predicativos que se producía en los modelos de neutralización. Por último, la posibilidad de justificar el producto de números enteros introduciendo una noción de ganancia o pérdida por unidad de tiempo o de velocidad resulta tan artificiosa como las anteriores[8].

Como conclusión, creemos que existen indicios suficientes para permitirnos afirmar que los modelos concretos que se utilizan en la enseñanza de los números enteros no cumplen satisfactoriamente la doble función de justificación y reconstrucción de la noción ya comentada en el primer epígrafe de esta ponencia. Por un lado, aunque justifican con cierta facilidad la suma y la resta de enteros (esta última con más dificultades), explican difícilmente el orden y no permiten justificar el producto de una manera que resulte inteligible para los niños. Por otro lado, la posibilidad de que los alumnos utilicen los modelos para reconstruir las reglas de cálculo en caso de olvido queda muy mermada desde el momento en que éstos proporcionan con igual facilidad argumentos que conducen a errores en los cálculos y razonamientos con números enteros[9].

La aritmética elemental y los números negativos

Pero, ¿por qué no se encuentran modelos concretos familiares a los niños y que, a la vez, ofrezcan una justificación satisfactoria de la estructura ordinal y multiplicativa de los números enteros? Desde luego, no es por falta de dedicación al tema, pues son muchos los investigadores que han buscado y siguen buscando un modelo de esas características. La contestación a esa pregunta exige que nos fijemos en el funcionamiento de los modelos concretos, en su manera de modelizar la noción de número entero.

Los modelos concretos funcionan por analogía, es decir, se muestra el comportamiento del modelo y, a continuación, se dice que los números enteros «se comportan igual». Por ejemplo, decimos que «si tenemos dos deudas de 500 y 200 pesetas, eso equivale a tener una deuda de 700 pesetas y, por consiguiente, de manera análoga, (–500) + (–200) tiene que ser igual a –700». El funcionamiento del modelo se basa, por tanto, en el hecho de «parecerse» a la noción aritmética que representa o, dicho de otra manera, trabajamos bajo el supuesto de que el modelo concreto reproduce la estructura algebraica de los números enteros. Pero esto no es así: en realidad, la estructura algebraica que más se asemeja a un modelo de neutralización es la estructura de espacio vectorial unidimensional (o, más precisamente, la restricción a Z del espacio vectorial R^1), y la más cercana a un modelo de desplazamiento es el espacio afín unidimensional (o mejor, la restricción a Z de la recta real). En cambio, la estructura de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad, propia de los números enteros, difícilmente podremos mostrarla por medio de un modelo concreto.

Por supuesto, todas estas estructuras son equivalentes: los números reales pueden interpretarse, tanto en términos de cuerpo conmutativo totalmente ordenado, como de espacio vectorial unidimensional, como de espacio afín unidimensional. Pero, si intentamos justificar el orden de los reales poniendo de manifiesto su estructura de espacio vectorial tendremos dificultades, del mismo modo que también las tendremos si intentamos justificar el producto interno propio de un cuerpo mostrando el producto externo definido en un espacio vectorial, o justificar la suma interna del cuerpo de los reales por medio de la operación externa que compone una posición con un desplazamiento para obtener otra posición, propia del espacio afín. Y esto es, precisamente, lo que estamos haciendo cuando utilizamos los modelos concretos. Cuando, por ejemplo, interpretamos (–3)(–2) como «reiterar tres veces el desplazamiento de dos casillas hacia la izquierda, cambiándolo de sentido», lo que estamos describiendo es el producto externo entre un escalar y un vector, no el producto interno entre dos números.

La mayor parte de los inconvenientes que plantea la utilización de modelos concretos en la enseñanza de los números enteros puede explicarse en términos del fenómeno que acabamos de describir. Y avanzando un poco más, podríamos llegar a decir que el origen del problema lo podemos encontrar en la pretensión de justificar el comportamiento de los números enteros en entornos aritméticos elementales, pues en ellos no hay más remedio que identificar el número entero con medidas de cantidades de magnitud, desplazamientos o posiciones, lo que desemboca, inevitablemente, en estructuras cercanas al espacio vectorial y al espacio afín que desvirtúan la estructura de anillo totalmente ordenado que es, en cambio, la que nos interesa resaltar.

Pero, además, a medida que se avanza en la enseñanza del número entero, la permanencia en entornos aritméticos plantea otros problemas. Ya comentamos en el primer epígrafe que, una vez que los alumnos adquieren una primera concepción de una noción aritmética por medio de uno o varios modelos, es necesario que el profesor invierta los términos de la modelización, pasando a presentar diversas situaciones del mundo sensible y pidiendo a los alumnos que las modelicen utilizando la noción aprendida. De esa manera se pone de manifiesto su utilidad, su capacidad para modelizar la realidad y, en último término, la necesidad de aprenderla.

Ahora bien, si analizamos las razones que ofrecen los libros de texto para justificar la utilidad de los números enteros, podemos comprobar que son muy pobres. Alegan, por ejemplo, que son necesarios para modelizar problemas como el siguiente: «Juan debe a sus amigos 5.000 pesetas. Si uno de ellos le perdona una deuda de 700 pesetas, ¿cuánto debe ahora

Juan?». En la resolución del problema se establece la necesidad de usar los números –5.000 y –700 porque se trata de deudas y entonces la operación que resuelve el problema es: (–5.000) – (–700) = –5.000 + 700 = –4.300. De forma similar, ante un problema como: «Si por la mañana la temperatura era de 4 grados bajo cero y al mediodía había subido 10 grados, ¿qué temperatura había al mediodía?», plantean la necesidad de realizar la operación (–4) + (+10) = +6.

Es evidente que si los números enteros sólo sirvieran para resolver problemas como los anteriores, no merecería la pena hacer el esfuerzo de aprenderlos y, probablemente, los matemáticos no se hubieran tomado el trabajo de inventarlos. Como todos sabemos muy bien, para cuando a los alumnos se les plantea la necesidad de resolver esos problemas utilizando números enteros, llevan años resolviéndolos en términos de números naturales. Desde luego, si a una deuda de 5.000 pesetas le quitamos una deuda de 700 pesetas, la operación 5.000 – 700 = 4.300, resuelve el problema de una forma más económica que la operación (–5.000) – (–700). Por otro lado, aumentar una temperatura de 4 grados bajo cero en 10 grados equivale a aumentarla primero en 4 grados, con lo que pasamos a tener cero grados y, a continuación, en 6 grados más, con lo que obtenemos una temperatura de 6 grados sobre cero, y la operación que interviene en este razonamiento es la descomposición 10 = 4 + 6, o bien la resta 10 – 4 = 6, en cualquier caso, operaciones entre números naturales.

Se podría argumentar que, aunque ese tipo de problemas se resuelve perfectamente utilizando números naturales, los números enteros «reflejan» o «traducen» mejor la situación. Esto respondería a la creencia de que el modelo, el representante, se tiene que parecer a lo representado, creencia que la enseñanza fomenta debido al uso analógico que hace de los modelos concretos[10], pero que hay que poner en entredicho. Generalmente, las ecuaciones matemáticas que modelizan un sistema del mundo sensible no se «parecen físicamente» al sistema que representan, pero eso no impide que su estudio permita obtener mucha información sobre dicho sistema. La principal función de un modelo no es la de «parecerse» al sistema que modeliza, sino la de aportar conocimiento sobre él y hacerlo de la manera más económica y eficaz posible[11]. Y, desde luego, todos los problemas de la aritmética elemental pueden resolverse utilizando números positivos y sin que el uso de números negativos aporte técnicas de resolución más económicas ni más potentes.

Entendemos, por tanto, que la aritmética elemental no es un ámbito adecuado para la introducción de los números negativos porque ni los necesita ni los justifica. Por un lado, los modelos concretos que en ella se definen no dan razón de la estructura de anillo ordenado de los números enteros e, incluso, parecen obstaculizar la comprensión de los aspectos ordinal y multiplicativo de la citada estructura; además, el uso que de ellos hacen los alumnos puede fomentar la aparición de reglas de cálculo erróneas. Por otro lado, la aritmética elemental no permite poner de manifiesto la utilidad de los números negativos, o de los números enteros en particular, porque todos los problemas que se plantean en ese ámbito pueden resolverse perfectamente en términos de números positivos.

La génesis histórica de los números negativos

Pero, si la aritmética elemental no necesita de los números negativos, si no hacen falta para modelizar aritméticamente sistemas en los que intervienen deudas y haberes, temperaturas[12], etc., ¿por qué se inventaron?, ¿qué es lo que obligó a los matemáticos a ampliar el campo de los números positivos? La contestación a esta pregunta exige seguir la pista de los números negativos a lo largo de la historia de las matemáticas, estudiando en qué entornos surgieron y cómo evolucionaron. Y la epistemología del número negativo, que en buena parte está todavía por hacer[13], nos muestra que fue el desarrollo de las técnicas de resolución de las ecuaciones algebraicas, el que forzó a los matemáticos a operar, no sólo con números, sino con términos que expresaban operaciones indicadas, sentando las bases de un cálculo entre sumandos y sustraendos que simplificaba las técnicas de cálculo algebraico y su justificación[14].

Las operaciones algebraicas acostumbraron a los matemáticos a utilizar los sumandos y sustraendos como objetos intermedios del cálculo. Además, desde el primer momento, se identificaron los sumandos con los números ya existentes, de manera que en cuanto un sumando aparecía como solución de una ecuación, dejaba automáticamente de serlo para convertirse en un número, sin más especificaciones[15]. Sin embargo, la aparición de un sustraendo como solución de una ecuación era un verdadero conflicto. Hay que tener en cuenta que el álgebra surge como una técnica de resolución de problemas aritméticos, es decir, de problemas en los que tanto los datos como las soluciones tenían que ser números. Además, dichos números sólo podían entenderse en tanto que medidas de cantidades de magnitud, quedando el significado de las operaciones de suma y resta ligado a las acciones de añadir, quitar, etc. En este contexto, un sustraendo aislado no podía tener sentido porque indicaba que había que sustraer «de donde no había», acción totalmente imposible de llevar a cabo, o bien porque indicaba una cantidad que era «menos que nada», lo que también era un sinsentido. Por consiguiente, y durante muchos siglos, los sustraendos no fueron aceptados como soluciones de las ecuaciones –eran soluciones «falsas» o «imposibles» que había que evitar– porque tampoco podían ser aceptados como números.

Pero, por otro lado, a medida que se desarrolla la teoría de ecuaciones, se hacen patentes las ventajas que supone el aceptar como soluciones los sustraendos y sus raíces pues, de esa manera, se puede establecer el teorema fundamental del álgebra: toda ecuación algebraica de grado n tiene n soluciones. Además, el desarrollo de la geometría analítica, es decir, la modelización algebraica de la geometría clásica griega, puso de manifiesto la biyección existente entre los puntos de la recta y los números reales, o entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales, etc., a condición, eso sí, de que los sustraendos formaran parte de esos números reales. Éstas y otras muchas razones forzaron a los matemáticos a asumir los sustraendos como números: los números negativos.

Ahora bien, para que este proceso llegara a su fin hubo que superar muchas dificultades. Fue necesario esperar a que Peacock proclamara la independencia del álgebra respecto a la aritmética[16], definiéndola como el arte de razonar sobre unos símbolos cuyo significado ya no venía dado por las nociones intuitivas de la aritmética elemental, sino por un conjunto de reglas formales que definían su comportamiento[17]. Una vez establecido el fundamento axiomático del álgebra, no se tardó mucho en plantear también una fundamentación axiomática de la aritmética que permitió definir los números negativos sin necesidad de recurrir a la medida de cantidades de magnitud, lo que solucionó definitivamente el problema[18].

En resumen, lo que el estudio de la epistemología de los números negativos pone de manifiesto es que la génesis de dichos números se produjo en el seno del álgebra y que su aceptación estuvo dificultada por la exigencia de la matemática clásica de interpretar los objetos algebraicos como objetos de la aritmética elemental. De acuerdo con esto, diversos autores (Brousseau, 1983; Cid, 2000; Glaeser, 1981; Schubring, 1986) llegan a proponer que la aritmética elemental y, en particular, el hecho de que los números sólo pudieran tener sentido como medidas de cantidades de magnitud, constituyeron un obstáculo epistemológico al reconocimiento matemático de los números negativos. Si esto se confirmara, nos encontraríamos con que la enseñanza habitual de los números enteros por medio de modelos concretos estaría fomentando dicho obstáculo, en vez de ayudar a superarlo.

Consecuencias para la investigación y la enseñanza

A lo largo de este trabajo hemos presentado un conjunto de hechos que hacen suponer que los modelos concretos utilizados para enseñar los números enteros pueden impedir una buena comprensión de dichos números o de los números negativos en general. La primera consecuencia que se deduce de esto es que la investigación didáctica debería dejar de centrar su atención en la búsqueda de nuevos modelos concretos o nuevos usos de los modelos ya conocidos, para analizar en profundidad los fenómenos anteriormente comentados. También parece conveniente empezar a plantearse la posibilidad de introducir los números negativos en un entorno algebraico, estudiando además la manera de salvar el posible obstáculo epistemológico originado por la concepción del número como medida.

Desde el punto de vista de la enseñanza, por el momento, poco se puede decir. La introducción de los números negativos en entornos algebraicos exige poner en marcha prototipos de enseñanza que deben ser previamente diseñados y experimentados y, evidentemente, esto no es responsabilidad de los profesores, sino de los investigadores en didáctica de las matemáticas. Hasta tanto esos prototipos no estén a disposición de los profesores, lo único que éstos pueden hacer es seguir utilizando los modelos concretos habituales, pero sin enfatizarlos en exceso y procurando paliar, en la medida de lo posible, los efectos secundarios que puedan producir.

Referencias bibliográficas

ARIS, R. (1994): *Mathematical Modelling Techniques*, Dover Publications, Nueva York.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BRUNO, A. (1997): «La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación», *Números*, 29, 5-18.

CHEVALLARD, Y. (1989): «Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modelisation», *Petit x*, 19, 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1992): «Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

CID, E. (1995): «De la aritmética al álgebra: obstáculos epistemológicos y didácticos», en F. Hernán y otros: *Aspectos didácticos de Matemáticas*. 5, ICE de la Universidad de Zaragoza, 127-162.

CID, E. (2000): «Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos», *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 10 (http://www.ugr.es/~jgodino/si-idm/Cangas/Negativos.pdf).

GASCÓN, J. (1993): «Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.

GLAESER, G. (1981): «Epistémologie des nombres relatifs», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GONZÁLEZ MARÍ, J.L. (1995): *El campo conceptual de los números naturales relativos*, tesis doctoral, Universidad de Granada.

JANVIER, C. (1983): «The understanding of directed numbers», en *Proceedings of the 15th Annual Conference of the North American Chapter of PME*, Montreal, 295-300.

LIZCANO, E. (1993): *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

MANZANO, M (1989): *Teoría de modelos*, Alianza Editorial, Madrid.

PYCIOR, H.M. (1981): «George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra», *Historia Mathematica*, 8, 23-45.

SCHUBRING, G. (1986): «Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs», *Petit x*, 12, 5-32.

Notas

* Este trabajo está subvencionado por el proyecto UZ00-CIEN-02 de la Universidad de Zaragoza.

** Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo».

1 Para más información sobre las distintas acepciones del término 'modelo' puede consultarse el prólogo de J. Mosterín en Manzano (1989), y también Aris (1994, pp. 1-38) y Chevallard (1989).

2 A partir de ahora, hablaremos de la enseñanza de los números enteros, en vez de la de los números negativos, porque en el currículo actual las «reglas de los signos» se introducen al enseñar los números enteros. Esto no siempre ha sido así: en otras épocas se enseñaban primero los números naturales, racionales y reales positivos, pasando después a los reales negativos. Esta última secuencia de enseñanza ha sido experimentada recientemente por Bruno (1997), llegando a la conclusión de que es ventajosa porque los niños que estudian los números negativos a través de los opuestos de los números conocidos por ellos obtienen resultados similares a los que los estudian por medio de los opuestos de los números naturales y, además, el coste en tiempo es el mismo.

3 Mientras no se introducen los números negativos, los signos '+' y '–' se utilizan sólo para indicar las operaciones aritméticas de suma y resta: son, por tanto, 'signos operativos'. Sin embargo, en el momento en el que aparecen los números positivos y negativos los signos '+' y '–' adquieren nuevas valencias. Una de ellas es la de indicar el carácter positivo o negativo de un número: decimos entonces que son 'signos predicativos'.

4 El argumento del profesor sería del tipo siguiente: «tener 70 pesetas y no deber nada es equivalente a tener 80 pesetas y deber 10 pesetas; si ahora suprimimos la deuda de 10 pesetas, nos queda un haber de 80 pesetas, luego $(+70) - (-10) = +80$».

5 Un razonamiento correcto desde el punto de vista de la resta de números enteros, exigiría decir que «necesito disminuir en 4 grados una temperatura de 2 bajo cero para obtener una temperatura de 6 grados bajo cero, luego $(-6) - (-2) = -4$».

6 En la tesis de González Marí (1995, pp. 289-394) se puede encontrar la descripción de un experimento que contribuye a confirmar este hecho.

7 En realidad, sería un preorden porque esa relación no cumple la propiedad antisimétrica.

8 Corresponde a situaciones como la siguiente: Antonio se gasta 1.500 pesetas cada domingo en la entrada de fútbol (–1.500). Deja de ir 4 domingos al fútbol (–4). Ahorra 1.500 x 4 = 6.000 pesetas (+6.000). Luego $(-1.500)(-4) = +6.000$.

9 Un asistente a la ponencia comentó en el debate posterior que, con mucha frecuencia, los niños memorizan las reglas del producto de enteros y después terminan aplicándolas también a las sumas y restas. Se trataría de razonamientos como el siguiente: «–5–3 = +2 porque 5–3 es igual a 2 y menos por menos es más». Esto podría ser un indicio más del fracaso de los modelos para reconstruir el comportamiento de la noción. Los alumnos no recurren al modelo, bien porque también lo han olvidado o porque no les resulta tan familiar y fácil de usar como se pretende, y utilizan el único recurso del que disponen: la regla de los signos para el producto de enteros, regla que recuerdan porque el profesor, consciente de la debilidad de los modelos para justificar el producto, ha insistido en que la memoricen.

10 En Aris (1994, pp. 27-38) puede encontrarse una descripción de distintos tipos de modelos. La 'analogía mecánica' es uno de los tipos descritos, pero no el único.

11 Este fenómeno de interpretación del modelo como «representación» o «imagen» del sistema que se pretende modelizar, es lo que Chevallard (1992, pp. 75-78) llama la 'ilusión representacionalista' y, para contrarrestarlo, propone sustituir la metáfora de la «imagen» por la metáfora de la «máquina», diciendo que un modelo es una máquina cuyo funcionamiento permite obtener conocimiento sobre el sistema modelizado y haciendo notar que las máquinas no se parecen a los objetos que fabrican. Profundizando un poco más, podríamos decir que detrás de esta 'ilusión representacionalista' está la creencia de la cultura griega clásica en que los conceptos matemáticos se obtienen por «abstracción» del mundo sensible, es decir, por separación de las características o propiedades que constituyen la «esencia» del objeto de aquellas otras que son circunstanciales.

12 De hecho, hoy en día, se sigue hablando de temperaturas por encima o debajo de cero y las deudas se siguen representando en una columna distinta de la de los haberes o en «números rojos».

13 Hay que tener en cuenta que los manuales de historia de las matemáticas apenas han dedicado atención al tema de los números negativos. Sólo a raíz de un artículo de Glaeser (1981) en el que ponía de manifiesto las dificultades que tuvieron los matemáticos de todas las épocas para asumir el número negativo, dificultades que no se superaron hasta el siglo XIX, han empezado a aparecer obras que estudian la epistemología de dichos números. La más detallada es la de Lizcano (1993) que estudia en profundidad la génesis del número negativo en las culturas griega y china.

14 En álgebra es necesario manipular expresiones como $(5 - b) - (a - 3)$, en la que aparece una diferencia de diferencias. Es decir, el cálculo algebraico obliga a plantearse las operaciones entre operaciones, además de las operaciones entre números que se plantea la aritmética. En estas condiciones, la aceptación de los sumandos y sustraendos como objetos de cálculo permite aligerar este último y justificarlo con más economía. Por ejemplo, si la operación $5x - 4 - 2x = 3x - 4$ la interpretamos como un cálculo entre los términos $5x$, 4 y $2x$, su justificación exigiría una secuencia como la siguiente: $5x - 4 - 2x = (5x - 4) - 2x = 5x - (4 + 2x) = 5x - (2x + 4) = (5x - 2x) - 4 = 3x - 4$, en la que intervienen la propiedad $(a - b) - c = a - (b+c)$ y la propiedad conmutativa de la suma. Sin embargo, si interpretamos que la expresión $5x - 4 - 2x$ representa una suma entre los términos $+5x$, -4 y $-2x$, las propiedades asociativa y conmutativa de la suma permiten, sin más, justificar la identidad $5x - 4 - 2x = 3x - 4$. El cálculo con sumandos y sustraendos transforma en sumas lo que antes eran sumas y restas, del mismo modo que el uso de expresiones racionales transforma en productos lo que de otro modo hubieran sido productos y cocientes. Y eso simplifica los cálculos algebraicos, tanto en su ejecución como en su justificación, porque la suma y el producto tienen muy «buenas» propiedades que, sin embargo, no son extensibles a la resta y al cociente. A este respecto, hay que añadir que la lectura que la mayoría de los libros de texto actuales hacen de las expresiones algebraicas, interpretando que en ellas se suprimen los signos predicativos de los números positivos, contradice la práctica habitual. Lo que permite un cálculo ágil es asumir la supresión del signo operativo de la suma, que queda representada por la mera yuxtaposición de los términos, y entender que los signos + y – que aparecen en las expresiones algebraicas son signos predicativos.

15 Esta identificación queda reflejada en la práctica habitual de suprimir el signo predicativo de un número positivo cuando se encuentra al comienzo de la expresión algebraica o cuando encabeza uno de los dos miembros de una igualdad o desigualdad.

16 Para más información sobre la progresiva separación entre la aritmética y el álgebra –lo que se ha dado en llamar el paso de la 'aritmética generalizada' al 'álgebra simbólica'– puede consultarse Cid (1995), Gascón (1993) y Pycior (1981).

17 La definición axiomática de estas reglas sólo estaba sometida a una restricción: las reglas formales tenían que ser compatibles con las reglas del cálculo aritmético, en el caso particular de que los símbolos algebraicos representasen términos aritméticos.

18 Problema que duró alrededor de dieciséis siglos: desde la primera formulación de la regla de los signos hecha por Diofanto en el siglo III d.C. hasta la definición axiomática de Hankel realizada en 1867.